
SZKOŁA GŁÓWNA HANDLOWA W WARSZAWIE
STUDIUM DYPLOMOWE

KIERUNEK FINANSE I BANKOWOŚĆ

Paweł Strzelecki
NR ALBUMU 15466

MODEL HOWARDA W ANALIZIE ZJAWISKA
ŁAKNIENIA ZNIŻKI W UBEZPIECZENIACH
KOMUNIKACYJNYCH

PRACA MAGISTERSKA NAPISANA
W INSTYTUCIE EKONOMETRII
POD KIERUNKIEM NAUKOWYM
PROF. DR HAB. MARII PODGÓRSKIEJ

WARSZAWA 2002

Spis treści

Wstęp.....	5
Rozdział 1. Podstawy teoretyczne modelowania zjawiska łaknienia zniżek.....	7
1.1 Łańcuch Markowa.....	7
1.2 Łańcuch Markowa z wypłatami.....	10
1.3 Optymalizacja dynamiczna łańcucha Markowa z wypłatami.....	13
1.4 Krótko i długookresowy model Howarda.....	15
Rozdział 2. Ryzyko, systemy bonus-malus i zjawisko łaknienia zniżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych.....	19
2.1 Podstawowa charakterystyka ryzyka w ubezpieczeniach komunikacyjnych.....	19
2.1.1 Rozkłady liczby szkód.....	21
2.1.2 Rozkłady wysokości szkód.....	23
2.2 Kalkulacja składek i system bonus-malus.....	26
2.3 Zjawisko łaknienia zniżki.....	30
Rozdział 3. Modelowanie systemów bonus- malus i zjawiska łaknienia zniżek.	32
3.1 Podstawowe założenia modelu.....	32
3.2 Modelowanie systemu bonus-malus za pomocą łańcuchów Markowa z wypłatami.....	34
3.2.1 System bonus-malus.....	35
3.2.2 Macierz prawdopodobieństw przejścia.....	37
3.2.3 Macierz kosztów.....	38
3.2.4 Model systemu bonus-malus, rozkład początkowy i rozkład stacjonarny.....	39
3.3 Wykorzystanie decyzyjnego łańcucha Markowa do wyboru optymalnego poziomu łaknienia zniżki.....	41
3.3.1 Zbiór decyzji.....	41
3.3.2 Macierze prawdopodobieństw przejścia dla poszczególnych decyzji.....	42
3.3.3 Macierze kosztów dla poszczególnych decyzji.....	44

3.3.4 Zastosowanie długo i krótkookresowego modelu Howarda do wyznaczania optymalnego poziomu łaknienia zniżki.....	47
Rozdział 4. Wyniki modelowania.....	52
4.1 Wprowadzenie.....	52
4.2 Wyniki modelu długookresowego.....	57
4.2.1 Proces rozwiązywania.....	57
4.2.2 Prezentacja rozwiązania.....	58
4.2.3 Porównanie wyników modelu dla wybranych zakładów ubezpieczeń.....	64
4.3 Wyniki modelu krótkookresowego.....	70
4.4 Porównanie wyników modelu długo i krótkookresowego.....	73
4.5 Analiza wrażliwości rozwiązania.....	77
4.5.1 Rozwiązanie w zależności od typu rozkładu.....	77
4.5.2 Rozwiązanie w zależności od stopy procentowej.....	79
4.5.3 Rozwiązanie w zależności od szkodowości.....	81
4.5.4 Rozwiązanie w zależności od przeciętnej wysokości szkody.....	84
4.5.5 Rozwiązania w zależności od zróżnicowania wartości szkód.....	86
4.6 Próba modelowania zjawiska łaknienia zniżek w polskich warunkach.....	87
Rozdział 5. Wnioski i podsumowania.....	91
Literatura.....	94
Załączniki.....	96

Wstęp

Zjawisko łaknienia zniżki (*hunger for bonus*) w ubezpieczeniach komunikacyjnych jest, jak wskazuje sama nazwa, ściśle związane z systemem zwyczaj i zniżek składki stosowanym przez zakłady ubezpieczeń. Powszechnie stosowaną w Polsce i na świecie jest metoda kalkulacji składki na podstawie dotychczasowego przebiegu ubezpieczenia za pomocą systemu bonus-malus. Podstawową cechą tego systemu jest uzależnianie płaconej składki od liczby szkód zgłaszanych przez ubezpieczonego w ustalonym okresie, którym najczęściej jest rok. Taki sposób kalkulacji składki sprawia, że ubezpieczony powodując szkodę o małej wartości może stanąć przed dylematem, czy zgłosić ją do zakładu ubezpieczeń i otrzymać odszkodowanie, czy też nie zgłaszać licząc na korzyść w postaci zniżki składki.

Problem podejmowania przez ubezpieczonego optymalnej decyzji w tej sytuacji doczekał się wielu opracowań teoretycznych¹, a sam termin *hunger for bonus* został wprowadzony po raz pierwszy przez Philipsona już w 1960 roku. W praktyce modelowanie tego zjawiska wymaga kompromisu pomiędzy realizmem założeń, a stopniem skomplikowania obliczeń. Jednym z najbardziej znanych modeli tego zjawiska jest podejście polegające na wykorzystaniu specyficznej metody optymalizacji łańcucha Markowa z wypłatami, zwanej długookresową lub iteracyjną metodą Howarda. Metoda ta, wraz z metodą rekurencyjną służącą optymalizacji w krótkim okresie, jest wykorzystana w tej pracy do stworzenia krótko i długookresowego modelu, pozwalającego wyznaczyć graniczną wysokość szkód, poniżej której zgłaszanie szkód do zakładu ubezpieczeń jest nieopłacalne dla ubezpieczonego.

Celem pracy jest porównanie możliwości zastosowania obydwu modeli zjawiska łaknienia zniżek oraz analiza skutków tego zjawiska na podstawie wyników przeprowadzonych obliczeń. Ponadto bada się wrażliwość otrzymanych rozwiązań na zmianę założeń, a rozważania kończy próba zastosowania modelu długookresowego opartego na metodzie iteracyjnej do modelowania łaknienia zniżek w Polsce na podstawie dostępnych danych empirycznych.

W pierwszym rozdziale przedstawione są wprowadzone przez Howarda metody optymalizacji (rekurencyjna i iteracyjna) oraz niezbędne do ich stosowania podstawowe wiadomości z dziedziny łańcuchów Markowa.

¹ Krótkie przedstawienie najważniejszych modeli zawiera praca Lemaire'a [1995], s.101-102.

Przedmiotem drugiego rozdziału jest zdefiniowanie ryzyka w ubezpieczeniach komunikacyjnych, przedstawienie zasad kalkulacji składki oraz konstrukcji systemu bonus-malus, a także opis zjawiska łaknienia zniżek i przedstawienie jego skutków.

Trzeci rozdział dotyczy założeń i budowy modelu SBM jako łańcucha Markowa z wypłatami oraz opartego na nim modelu zjawiska łaknienia zniżki przy użyciu decyzyjnego łańcucha Markowa. Model zjawiska łaknienia zniżki zależy od przyjętej metody wyznaczania rozwiązania optymalnego (iteracyjnej lub rekurencyjnej) nosi nazwę długo lub krótkookresowego

Czwarty rozdział zawiera prezentację wyników zastosowania modelu do realizacji celów pracy. Wyniki te są otrzymane na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych przy użyciu programu napisanego dla potrzeb tej pracy w środowisku Matlab, którego tekst jest prezentowany w załączniku nr 2.

Piąty rozdział zawiera natomiast wnioski płynące z otrzymanych wyników obliczeń oraz podsumowanie pracy.

Rozdział 1

Podstawy teoretyczne modelowania zjawiska łąknienia zniżek

Rozdział ten zawiera przedstawienie metody Howarda, użytej w dalszej części pracy do modelowania i analizy zjawiska łąknienia zniżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Opis tej metody poprzedzony jest krótkim wprowadzeniem niezbędnych pojęć z dziedziny łańcuchów Markowa, łańcuchów Markowa z wypłatami oraz optymalizacji dynamicznej.

1.1 Łańcuch Markowa

Procesem stochastycznym nazywa się przeliczalny lub nieprzeliczalny zbiór zmiennych losowych X_t , gdzie t jest parametrem rzeczywistym indeksującym te zmienne². W dalszej części pracy przyjmuje się, że t przebiega zbiór liczb naturalnych³, zatem proces stochastyczny można oznaczyć jako $\{X_n, n \in N\}$.

Zbiór S zawierający możliwe wartości zmiennych losowych X_n , które tworzą proces stochastyczny $\{X_n, n \in N\}$, nazywany jest przestrzenią stanów, a elementy tego zbioru stanami fazowymi procesu. O zaistnieniu zdarzenia $X_n=i$, gdzie $i \in S$, mówi się, że w momencie n (po n -tym kroku), proces był w stanie i .

Proces stochastyczny $\{X_n, n \in N\}$ jest skończonym łańcuchem Markowa (SŁM) o przestrzeni stanów będącej skończonym zbiorem $S=\{1,2,\dots,s\}$, jeżeli dla każdego ciągu momentów $0, 1, 2, \dots, n \in N$ oraz stanów $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in S$ spełniony jest warunek Markowa zadany równością

$$P(X_n=j / X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}) = P(X_n=j / X_{n-1}=i_{n-1}). \quad (1.1)$$

² Wszystkie definicje i twierdzenia podane w tym podrozdziale pochodzą z pracy Podgórskiej i in. [2000] oraz Koźniewskiej, Włodarczyka [1978].

³ Przyjmuje się, że zbiór liczb naturalnych zawiera liczbę 0.

Skończone łańcuchy Markowa (SŁM) są więc specyficzną grupą procesów stochastycznych, z czasem dyskretnym i skończoną liczbą stanów. Warunek Markowa (1.1) oznacza, że prawdopodobieństwo znalezienia się procesu w stanie j w momencie n pod warunkiem, że w chwili $n-1$ znajdował się w stanie fazowym i , nie zależy od tego w jakich stanach był proces w chwilach wcześniejszych od $n-1$, lub inaczej, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X_n zależy tylko od realizacji zmiennej X_{n-1} .

Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(X_n=j | X_{n-1}=i)=p_{ij}(n), \quad (1.2)$$

jest nazywane prawdopodobieństwem przejścia łańcucha ze stanu i w chwili $n-1$ do stanu j w chwili n .

Skończony łańcuch Markowa $\{X_n, n \in N\}$ jest jednorodny, jeżeli prawdopodobieństwa warunkowe $p_{ij}(n)$ przejścia ze stanu fazowego i do j w czasie od $n-1$ do n nie zależą od n , czyli

$$p_{ij}(n) = p_{ij}, \text{ dla } n \in N. \quad (1.3)$$

W dalszej części tej pracy rozpatrywane będą tylko skończone, jednorodne łańcuchy Markowa (SJŁM) dlatego nazwa ta będzie używana zamiennie z nazwą łańcuchy Markowa.

Macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha Markowa o przestrzeni stanów $S=\{1,2,\dots,s\}$ nazywa się macierz

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

gdzie p_{ij} jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do j w jednym kroku. Elementy p_{ij} tej macierzy spełniają warunki:

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \text{ dla } i \in S, \quad (1.5)$$

$$p_{ij} \geq 0, \text{ dla } i, j \in S, \quad (1.6)$$

zatem P jest macierzą stochastyczną. Wiersz i -ty tej macierzy

$$p_i = [p_{i1} \ p_{i2} \ \dots \ p_{is}] \quad (1.7)$$

stanowi warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X_n pod warunkiem $X_{n-1}=i$.

Bezwarunkowym rozkładem prawdopodobieństw stanu łańcucha Markowa w momencie $n \in N$ nazywa się wierszowy wektor

$$d_n = [d_{n1} \ d_{n2} \ \dots \ d_{ns}], \quad (1.8)$$

gdzie

$$d_{nj} = P(X_n=j), \text{ dla } j \in S, n \in N, \quad (1.9)$$

skąd wynika, że

$$d_{nj} \geq 0, \quad \text{dla } j \in S, n \in N, \quad (1.10)$$

oraz

$$\sum_{j \in S} d_{nj} = 1, \quad \text{dla } n \in N.$$

W szczególności rozkładem takim jest rozkład d_0 prawdopodobieństw początkowych, czyli w momencie $n=0$.

Bezwarunkowe prawdopodobieństwa stanu d_{nj} , dla $n \in N$ można obliczyć stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite

$$\begin{aligned} d_{nj} &= P(X_n=j) = P(X_{n-1}=1)P(X_n=j|X_{n-1}=1) + \dots + P(X_{n-1}=s)P(X_n=j|X_{n-1}=s) = \\ &= \sum_{i \in S} P(X_{n-1}=i)P(X_n=j|X_{n-1}=i) = \sum_{i \in S} d_{n-1,i} p_{ij} \end{aligned} \quad (1.11)$$

W zapisie macierzowym, stosując ten wzór dla wszystkich $j \in S$, można otrzymać rekurencyjną zależność bezwarunkowych rozkładów zmiennych X_n oraz X_{n-1} ,

$$d_n = d_{n-1} P, \quad \text{dla } n \in N. \quad (1.12)$$

Powyższe macierzowe równanie rekurencyjne przy warunku początkowym d_0 ma rozwiązanie

$$d_n = d_0 P^n, \quad \text{dla } n \in N. \quad (1.13)$$

Występująca w powyższym wzorze n -ta potęga⁴ macierzy P ,

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1r}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{r1}^{(n)} & \dots & p_{rr}^{(n)} \end{bmatrix},$$

jest macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha w n krokach. Elementy tworzące i -ty wiersz tej macierzy stanowią warunkowy rozkład prawdopodobieństwa trafienia łańcucha do dowolnego stanu $j \in S$ w chwili n , jeśli n kroków wcześniej łańcuch był w stanie i .

Znajomość macierzy prawdopodobieństw przejścia P oraz rozkładu początkowego d_0 umożliwia wyznaczenie bezwarunkowych rozkładów prawdopodobieństwa d_n w dowolnej chwili $n \in N$, co pozwala na pełną charakterystykę tego procesu.

Ważną kwestią jest zachowanie się SJŁM w długim okresie. Poniżej przedstawione są wykorzystywane w dalszej części pracy własności i pojęcia z tej dziedziny.

Rozkładem stacjonarnym SJŁM o macierzy prawdopodobieństw przejścia P nazywa się wierszowy wektor $\pi = [\pi_j]$, dla $j \in S$, taki że

$$\pi P = \pi, \quad (1.14)$$

⁴ W tym przypadku oznaczenie P^n oznacza n -tą potęgę macierzy P . W dalszej części pracy, ze względu na dużą liczbę oznaczeń, symbol występujący w tym miejscu domyślnie traktowany będzie jako górny wskaźnik. Kilka przypadków, w których stosowany będzie zapis potęgowy, zostanie poprzedzone odpowiednimi przypisami. W tym rozdziale zapis potęgowy stosowany jest jeszcze we wzorach (1.25)– (1.30).

przy czym

$$\pi_j \geq 0, \quad \text{dla } j \in S,$$

oraz

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1.$$

Dla każdego SJŁM istnieje przynajmniej jeden rozkład stacjonarny.

Niektóre macierze stochastyczne, będące macierzami prawdopodobieństw przejścia SJŁM, mają właściwości, które pozwalają na prostą analizę zachowania się łańcucha w długim czasie. Macierzami takimi są macierze regularne. Macierze te od pozostałych typów odróżnić można dwoma sposobami. Po pierwsze, badając ich wartości własne, ponieważ warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by macierz stochastyczna była regularna jest, by jej wartość własna $\lambda_1 = 1$ była pojedyncza, a pozostałe wartości własne miały moduły mniejsze od 1. Drugi sposób odwołuje się do twierdzenia ergodycznego, na mocy którego dla każdej macierzy regularnej P istnieje taka jej potęga, w której co najmniej jedna kolumna ma wszystkie elementy dodatnie (por. Koźniewska, Włodarczyk [1978], s.245).

Na mocy twierdzenia Frecheta dla każdej macierzy regularnej P istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = E, \quad (1.15)$$

gdzie E oznacza stochastyczną macierz ergodyczną (macierz stochastyczną o identycznych wierszach). Jeżeli zatem macierz prawdopodobieństw przejścia P SJŁM jest regularna, to ciąg bezwarunkowych rozkładów łańcucha zmierza przy $n \rightarrow \infty$ do rozkładu stacjonarnego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_0 P^n = d_0 \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = d_0 E = e, \quad (1.16)$$

przy czym rozkład e jest identyczny z wierszami macierzy E i jest to jedyny stacjonarny rozkład tego łańcucha.

1.2 Łańcuch Markowa z wypłatami

Skończony jednorodny łańcuch Markowa jest podstawą przedstawionej w pracy Howarda [1969] koncepcji łańcucha Markowa z wypłatami, w której każdemu przejściu pomiędzy stanami można przypisać nie tylko prawdopodobieństwo przejścia, lecz również wartość liczbową, która może być dochodem lub kosztem związanym z tym przejściem.

W dalszej części tej pracy łańcuchy Markowa z wypłatami używane będą do modelowania kosztów związanych z ubezpieczeniami komunikacyjnymi w firmach ubezpieczeniowych stosujących system bonus – malus, dlatego wygodniej będzie już w tym

miejscu zastąpić przyjęte przez Howarda pojęcie dochodów (wypłat) pojęciem kosztów ponoszonych w związku z ubezpieczeniem. Oznaczenie r_{ij} reprezentować będzie koszt związany z przejściem ze stanu i do j w jednym kroku (jednostce czasu). Koszt r_{ij} zostaje zatem poniesiony z prawdopodobieństwem p_{ij} .

Zbiór kosztów związanych ze wszystkimi możliwymi przejściami pomiędzy stanami zapisuje się w postaci macierzy $R = [r_{ij}]$. Macierz ta, podobnie jak macierz P , jest macierzą kwadratową stopnia s . Stosując przyjęte powyżej oznaczenie, koszt oczekiwany w jednym kroku przy wyjściu ze stanu i można zapisać jako

$$q_i = \sum_{j=1}^s p_{ij} r_{ij} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, s. \quad (1.17)$$

W dalszej części pracy wielkość q_i będzie nazywana bezpośrednim kosztem oczekiwanym przy wyjściu ze stanu i , natomiast wektor kolumnowy $q = [q_i]$ będzie wektorem bezpośrednich kosztów oczekiwanych w zależności od stanu wyjściowego.

Niech $v_i(n)$ oznacza całkowity oczekiwany koszt w ciągu n kroków przy wyjściu ze stanu i , a $v_i(0)$ przyjęty koszt ponoszony w stanie i okresie $n=0$ zwany dalej kosztem początkowym. Wzór rekurencyjny służący wyznaczeniu kosztu $v_i(n)$ można zapisać dla ustalonego $v_i(0)$, $i=1, 2, \dots, s$, $n=1, 2, \dots$ w postaci:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^s p_{ij} v_j(n-1), \quad (1.18)$$

lub, po uwzględnieniu wzoru (1.17),

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^s p_{ij} [r_{ij} + v_j(n-1)]. \quad (1.19)$$

Niech $v(n) = [v_i(n)]$ oznacza kolumnowy wektor kosztów oczekiwanych w ciągu n kroków, $v(0) = [v_i(0)]$ kolumnowy wektor ustalonych kosztów początkowych, q wektor kosztów bezpośrednich, a P macierz prawdopodobieństw przejścia. Zależność (1.18) może być przedstawiona jako rekurencyjne równanie macierzowe

$$v(n) = q + P v(n-1), \quad \text{dla } n \in N \quad (1.20)$$

przy ustalonym $v(0)$.

Istotne znaczenie dla obliczania kosztów związanych ze składkami wieloletniego ubezpieczenia ma zmieniająca się wartość pieniądza w czasie, której nie uwzględniają powyższe wzory. Sposobem na jej uwzględnienie jest wprowadzenie czynnika dyskontującego

$$g = \frac{1}{1+r}, \quad (1.21)$$

gdzie r jest stopą procentową dla jednego okresu. Na ogół spełnione jest przy tym ograniczenie $0 < \mathcal{G} < 1$, (por. Bijak i in. [1994]).

Wzory rekurencyjne pozwalające obliczyć oczekiwany koszt całkowity w n krokach po zdyskontowaniu przyszłych kosztów na moment $n=0$ można zapisać dla ustalonego $v_i(0)$, $j=1,2,\dots,s$, $n=1,2,\dots$ w postaci:

$$v_i(n) = q_i + \mathcal{G} \sum_{j=1}^s p_{ij} v_j(n-1), \quad (1.22)$$

lub po uwzględnieniu wzoru (1.17)

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^s p_{ij} [r_{ij} + \mathcal{G} v_j(n-1)], \quad (1.23)$$

a w postaci macierzowej

$$v(n) = q + \mathcal{G} P v(n-1) \quad (1.24) \quad \text{dla}$$

$n \in N$ i warunku początkowego $v(0)$.

W celu rozwiązania powyższego równania rekurencyjnego można zauważyć, że

$$v(1) = q + \mathcal{G} P v(0),$$

$$v(2) = q + \mathcal{G} P v(1) = q + \mathcal{G} P [q + \mathcal{G} P v(0)] = q + \mathcal{G} P q + \mathcal{G}^2 P^2 v(0),$$

.....

$$\begin{aligned} v(n-1) &= q + \mathcal{G} P v(n-2) = q + \mathcal{G} P q + \mathcal{G}^2 P^2 q + \dots + \mathcal{G}^{n-2} P^{n-2} q + \mathcal{G}^{n-1} P^{n-1} v(0) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-2} (\mathcal{G} P)^j \right) q + \mathcal{G}^{n-1} P^{n-1} v(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(n) &= q + \mathcal{G} P v(n-1) = q + \mathcal{G} P q + \mathcal{G}^2 P^2 q + \dots + \mathcal{G}^{n-1} P^{n-1} q + \mathcal{G}^n P^n v(0) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{G} P)^j \right) q + \mathcal{G}^n P^n v(0), \end{aligned} \quad (1.25)$$

zatem z dowodu indukcyjnego wynika, że prawdziwy jest wzór

$$v(n) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{G} P)^j \right) q + \mathcal{G}^n P^n v(0). \quad (1.26)$$

Przy założeniu, że $0 < \mathcal{G} < 1$, istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathcal{G} P)^j q. \quad (1.27)$$

Granice tego szeregu można obliczyć korzystając z następującego twierdzenia: *Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy A stopnia s są co do modułu mniejsze od 1, to szereg*

geometryczny $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ jest zbieżny, a jego sumą jest $(I-A)^{-1}$, (por. Podgórska i in. [2000], s. 137).

Macierz P jest macierzą stochastyczną, zatem wszystkie jej wartości własne są co do modułu mniejsze lub równe 1, a ponieważ $0 < \mathcal{G} < I$ wszystkie wartości własne macierzy $\mathcal{G}P$ są co do modułu mniejsze od 1. Zatem granica szeregu macierzowego

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\mathcal{G}P)^j \quad (1.28)$$

istnieje i jest równa macierzy odwrotnej do $I - \mathcal{G}P$, czyli

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\mathcal{G}P)^j = (I - \mathcal{G}P)^{-1} . \quad (1.29)$$

Przy nieskończone odległym horyzoncie czasowym istnieje zatem granica sumy zdyskontowanych kosztów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = (I - \mathcal{G}P)^{-1} q . \quad (1.30)$$

Wektor kolumnowy obliczony za pomocą wzoru (1.30) składa się z elementów będących obecną wartością oczekiwaną kosztów przy nieskończone odległym horyzoncie czasowym zależną od stanu procesu w chwili początkowej $n=0$.

1.3 Optymalizacja dynamiczna łańcucha Markowa z wypłatami

Łańcuch Markowa z wypłatami może sam w sobie stanowić narzędzie modelowania i analizy zjawisk, jednak w modelu Howarda zostaje on użyty do celów optymalizacji. Przedstawienie tego modelu wymaga krótkiego wprowadzenia dotyczącego programowania dynamicznego⁵.

Podstawowymi pojęciami stosowanymi w optymalizacji dynamicznej są: decydent (*decision maker*), decyzja (*decision*), strategia (*strategy, policy*) oraz momenty decyzji (*decision epochs*). Przez decyzję rozumie się wybór jednego zachowania (aktywności) oznaczonego jako k ze zbioru możliwych zachowań K . Decydent jest rozumiany jako podmiot podejmujący decyzje i odczuwający ich skutki. Momentami decyzji są punkty (okresy) w czasie, kiedy są podejmowane decyzje. Jeżeli w każdym momencie decyzji zbiór K decyzji możliwych do podjęcia jest jednakowy, to kolejne decyzje nazywa się sekwencyjnymi. Zbiór decyzji podjętych w każdym z momentów decyzji nazywa się strategią. Decydent dąży do

⁵ Podstawowe pojęcia z tej dziedziny przedstawione są w pracy Bellmana [1967] rozdział I oraz Putermana, Martina [1994], gdzie znaleźć można także szerokie przedstawienie problematyki optymalizacji za pomocą łańcucha Markowa z wypłatami. Dla porządku podane są pojęcia w języku polskim wraz z ich anglojęzycznymi odpowiednikami użytymi w pracy Putermana, Martina [1994]

wyboru takiej strategii, która będzie dla niego optymalna. Kryterium optymalności może być na przykład minimalizacja kosztów. Proces wyznaczania przez decydenta optymalnej strategii nazywany jest procesem decyzyjnym. Problem wyznaczenia optymalnej strategii może wymagać wyznaczania kolejnych decyzji optymalnych etapowo, co jest nazywane wieloetapowym procesem decyzyjnym.

Ogólną własnością wieloetapowych procesów decyzyjnych, pozwalającą na zredukowanie rozważanej liczby rozwiązań w poszukiwaniu rozwiązania optymalnego jest *zasada optymalności* podana przez Bellmana. Zasada ta stwierdza, że

“Optymalna strategia ma tę własność, że niezależnie od początkowego stanu i początkowej decyzji pozostałe decyzje muszą stanowić strategię optymalną ze względu na stan wynikający z pierwszej decyzji.” (por. Bellman [1967], s.21).

Do zasady tej odwołuje się Howard konstruując metodę rekurencyjną. Należy przy tym zaznaczyć, że wybór kolejnych decyzji do optymalnej strategii zaczyna się od najlepszej możliwej decyzji dla ostatniego okresu. Następnie wybiera się kolejne najlepsze decyzje cofając się za każdym razem o okres, aż do pierwszego okresu, w którym można podejmować decyzję. Sformułowanie “w n -tym kroku” należy zatem rozumieć jako “przy n krokach do końca” i tak też jest rozumiane w niniejszej pracy.

Rozwiązanie problemu polegającego na minimalizacji kosztów⁶ za pomocą programowania dynamicznego z wykorzystaniem łańcucha Markowa wymaga zdefiniowania:

- Zbioru stanów S , w jakich może znaleźć się interesujący nas system (przestrzeni stanów łańcucha Markowa)
- Skończonego zbioru decyzji K , jakie mogą zostać podjęte w każdym z okresów. Wybrana decyzja jest identyfikowana za pomocą górnego wskaźnika k .
- Macierzy prawdopodobieństw przejścia pomiędzy stanami w jednym kroku w zależności od decyzji, która została podjęta $P^k = [p_{ij}^k]$. Element p_{ij}^k oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do j w jednym kroku przy wyborze decyzji k .
- Macierzy kosztów związanych z przejściami pomiędzy stanami w zależności od podjętej decyzji $R^k = [r_{ij}^k]$. Element r_{ij}^k oznacza koszt ponoszony przy przejściu ze stanu i do j w jednym kroku przy wyborze decyzji k .

Momentów decyzji $1, 2, \dots, n$ nie trzeba definiować, gdyż odpowiadają one momentom czasu w łańcuchu Markowa. Decyzja k podjęta w momencie $n-1$ wpływa na prawdopodobieństwa oraz koszty przy przejściu ze stanu i w momencie $n-1$ do stanu j w momencie n .

⁶ W pracy Bellmana [1967], s. 282 w definicji występuje pojęcie maksymalizacji przychodów, w pracy tej zgodnie z przyjętą terminologią (patrz: 1.2) odpowiada jej minimalizacja kosztów. Problem minimalizacji kosztów rozpatrywany jest w cytowanej pracy (s. 297) na przykładzie “zagadnienia zastąpienia samochodu”.

1.4 Krótko i długookresowy model Howarda

Metoda rekurencyjna użyta w krótkookresowym modelu Howarda⁷ oparta jest na wykorzystaniu *zasady optymalności*. Polega ona na wykorzystaniu wzorów rekurencyjnych do wyznaczenia kosztów całkowitych, w kolejnym (licząc od ostatniego) okresie. Koszty te są za każdym razem minimalizowane. Decyzja, która jest podejmowana w każdym okresie, skutkuje wyborem określonej macierzy prawdopodobieństw P^k oraz wypłat R^k w tym okresie. Wynika z tego, że oczekiwany koszt bezpośredni ponoszony w jednym okresie przy k -tej decyzji można obliczyć według wzoru analogicznego do (1.17) czyli:

$$q_i^k = \sum_{j=1}^s p_{ij}^k r_{ij}^k \quad (1.31)$$

Oczekiwany koszt całkowity dla n kroków przy k -tej strategii będzie miał zatem postać analogiczną do (1.18) :

$$v_i(n) = q_i^k + \mathcal{G} \sum_{j=1}^s p_{ij}^k v_j(n-1), \quad \text{dla } i=1,2,\dots,s, \quad n=1,2,\dots, \quad (1.32)$$

gdzie $v(0)$ oznacza koszt początkowy niezależny od decyzji.

Celem optymalizacji jest wyznaczenie strategii, dzięki której minimalizuje się koszty całkowite ponoszone przez ubezpieczonego, dlatego najlepszą decyzją k_{ni}^* przy horyzoncie n -letnim i stanie początkowym i będzie decyzja minimalizująca koszty

$$v_i^*(n) = \min_k [q_i^k + \mathcal{G} \sum_{j=1}^s p_{ij}^k v_j^*(n-1)], \quad (1.33)$$

gdzie $v_j^*(n-1)$ jest kosztem w optymalnej strategii przy horyzoncie $(n-1)$ -letnim wyznaczonym analogicznie. W ten sposób dzięki *zasadzie optymalności* możliwe jest wyznaczenie strategii optymalnej składającej się z wektorów decyzji, których elementami są decyzje optymalne w zależności od stanu, w kolejnych momentach decyzji k_n^* , $n=1,2,\dots$

Metoda rekurencyjna jest użytecznym narzędziem dla wyznaczania rozwiązania optymalnego przy krótkim horyzoncie czasowym. Jednak dla analizy problemów dotyczących procesów, w toku których realizuje się bardzo duża liczba przejść zanim zostaną zakończone, metoda ta może okazać się nieefektywna, chyba że rozwiązania odpowiednio szybko zbiegają do asymptotycznego rozwiązania optymalnego.

Metoda iteracyjna, stosowana w długookresowym modelu Howarda wykorzystuje stabilizację średniego oczekiwanego kosztu i kosztów całkowitych wraz ze wzrostem n . W

⁷ Treść tego podrozdziału oparta jest na pracy Howarda [1969].

przypadku nieuwzględnienia czynnika dyskontującego nie można wyznaczyć granicznej wartości kosztów całkowitych przy nieskończonym horyzoncie czasowym. Chcąc wyznaczyć optymalną strategię długookresową w tej sytuacji można skorzystać ze stabilizacji średniego oczekiwanego kosztu (por. Howard [1969], rozdział 4), który można dokładnie wyznaczyć dla nieskończonego horyzontu czasowego, czyli w praktyce dla dostatecznie dużych n , posługując się wzorem:

$$g = \sum_{i=1}^s \pi_i q_i, \quad (1.34)$$

gdzie

g – oznacza graniczny średni koszt dla dużych n (odległego horyzontu czasowego),

π_i - oznacza stacjonarne prawdopodobieństwo dla stanu i ,

q_i – bezpośredni oczekiwany koszt przy wyjściu ze stanu i obliczony za pomocą wzoru (1.17).

Bez uwzględnienia czynnika dyskontującego średni oczekiwany koszt g jest różnicą pomiędzy kosztami v_i poniesionymi przy bardzo odległym horyzoncie czasowym oraz kosztami poniesionymi w okresie następnym obliczonymi na podstawie (1.18),

$$q_i + \sum_{j=1}^s p_{ij} v_j.$$

Stąd zależność pomiędzy średnim kosztem g oraz kosztami v_i przedstawia układ równań

$$g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^s p_{ij} v_j, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (1.35)$$

Zależność ta stanowi układ s równań względem $s+1$ niewiadomych (s zmiennych v_i oraz g). Można jednak zauważyć, że dodanie wielkości stałej do wszystkich zmiennych v_i nie zmienia równań. Oznacza to, że ważne są tylko względne wartości zmiennych v_i , a nie ich wartości absolutne. Co prowadzi do wniosku, że jedną wartość v_i można przyjąć dowolnie, w celu otrzymania jednego rozwiązania układu s równań z s niewiadomymi.

Niech $v_s=0$, wtedy rozwiązanie układu daje nam przeciętną średnią wartość kosztu w długim okresie g oraz względne wartości kosztów dla różnych stanów początkowych v_i dla ustalonej polityki. W pracy Howarda (por. Howard [1969], s.45) takie wyznaczenie przychodu i wartości przy danej strategii nazywa się procesem wyznaczania wag.

Jeżeli uwzględniony zostaje współczynnik dyskontujący ρ , możliwe staje się wyznaczenie kosztów granicznych przy nieskończonym horyzoncie czasowym, ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n g = 0.$$

Dokonać tego można posługując się wzorem (1.30). Wzór ten jest rozwiązaniem układu równań analogicznego do (1.35), który można zapisać następująco:

$$v_i = q_i + \vartheta \sum_{j=1}^s p_{ij} v_j, \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, s \quad (1.36)$$

lub w postaci macierzowej jako

$$v = q + \vartheta P v$$

Rozwiązanie tego układu s równań z s niewiadomymi v_i ,

$$v = q + \vartheta P v, \text{ czyli } v = (I - \vartheta P)^{-1} q, \quad (1.37)$$

pozwała na wyznaczenie całkowitych zdyskontowanych kosztów w długim horyzoncie czasowym.

Iteracyjna metoda Howarda zakłada, że aby w i -tym stanie podjąć minimalizującą koszty decyzję dla nieskończonego odległego horyzontu czasowego należy zminimalizować wyrażenie postaci

$$q_i^k + \vartheta \sum_{j=1}^s p_{ij}^k v_j, \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.38)$$

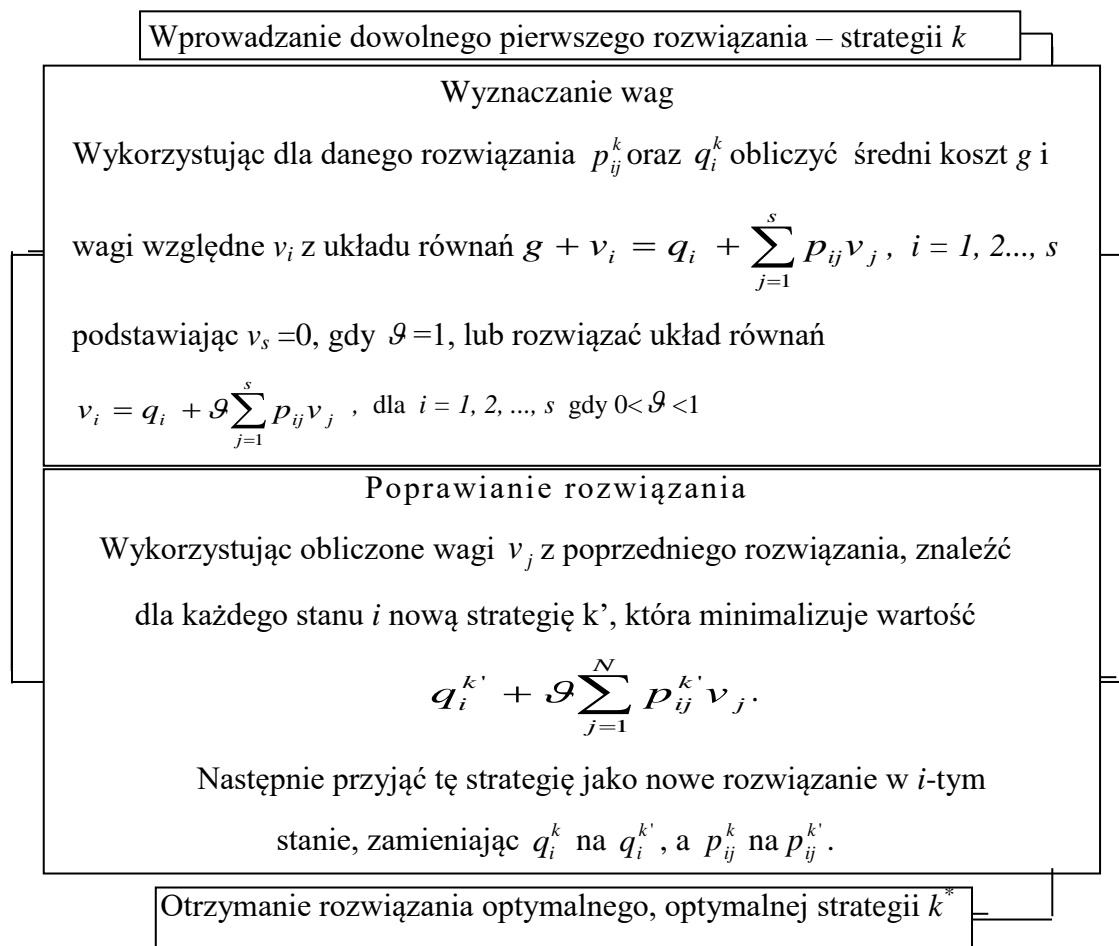
względem wszystkich strategii w i -tym stanie, co jest nazywane poprawianiem rozwiązania, przy czym $\vartheta = 1$, jeżeli wartość pieniądza w czasie się nie zmniejsza.

Charakterystyczną cechą strategii wyznaczonej przy użyciu metody iteracyjnej jest to, że decyzje są jednakowe, niezależnie od momentu decyzji. Strategia składa się więc z sekwencji jednakowych decyzji, co prowadzi do wniosku, że całą strategię można określić przez podanie decyzji dla każdego stanu, czyli wektora k . Wektor decyzji optymalnych oznaczony jest jako k^* .

Proces decyzyjny w metodzie iteracyjnej można opisać za pomocą algorytmu przedstawionego w postaci schematu 1.1. Proces decyzyjny zaczyna się od przyjęcia dowolnego wektora decyzji k . Wektorowi decyzji k odpowiadają elementy macierzy prawdopodobieństw p_{ij}^k , macierzy kosztów r_{ij}^k oraz obliczony na podstawie wzoru (1.17) koszt q_i^k , które podstawia się do układu równań (1.35) lub (1.36) zależnie od przyjętego ϑ .

Rozwiązanie układu równań względem v_i służy następnie obliczeniu wartości wyrażenia (1.38) dla wszystkich badanych strategii. Następnie wybierane są nowe decyzje reprezentowane przez wektor k' , dla każdego stanu, które minimalizują wartość wyrażenia (1.38) i cykl zaczyna się na nowo. Proces decyzyjny kończy się (dowód w pracy Howarda [1967], s.48- 49), jeżeli dwie kolejne iteracje nie powodują zmiany wektora decyzji. Wektor ten jest zbiorem decyzji optymalnych, które reprezentują strategię optymalną dla każdego stanu.

Schemat 1.1. Cykl iteracyjny w długookresowym modelu Howarda



Źródło: Praca Howarda [1969], s.87

Niewątpliwą zaletą metody iteracyjnej jest to, że pozwala od razu uzyskać rozwiązanie optymalne długookresowo, bez konieczności prowadzenia obliczeń dla kolejnych okresów. Niemniej jednak rozwiązanie takie może się znacznie różnić od rozwiązania optymalnego w krótkim okresie, stąd wynika konieczność stosowania metody iteracyjnej, albo rekurencyjnej zależnie od horyzontu optymalizacji.

Rozdział 2

Ryzyko, systemy bonus - malus i zjawisko łaknienia niżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych

Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie ryzyka w ubezpieczeniach, jego podstawowych charakterystyk, systemu bonus-malus oraz związanego z nim zjawiska łaknienia niżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych⁸.

2.1 Podstawowa charakterystyka ryzyka w ubezpieczeniach komunikacyjnych

Ryzyko ubezpieczeniowe jest definiowane na różne sposoby, zależnie od aspektu, który bierze się pod uwagę, oraz od okoliczności, jakie interesują badacza. Najpopularniejszą definicją ryzyka jest przedstawienie go jako możliwości wystąpienia straty finansowej. Słowo możliwość może być interpretowane jako prawdopodobieństwo określonego zdarzenia, czyli liczba z przedziału $\langle 0,1 \rangle$. Niewątpliwie posiadanie i używanie samochodu wiąże się z możliwością poniesienia strat finansowych. Jeżeli przyjąć, iż stratą jest wartość szkód, jakie zdarzają się ubezpieczonemu w ciągu roku, a możliwość jest opisana rozkładem prawdopodobieństwa wystąpienia straty w określonej wysokości, to wystarczy to do określenia ryzyka w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Rozważania te prowadzą do wniosku, że dobrym modelem ryzyka ubezpieczeniowego jest nieujemna zmienna losowa, której wartość oczekiwana jest skończona, ponieważ ryzyko, które ma nieskończoną wartość oczekiwaną nie podlega ubezpieczeniu.

W ubezpieczeniach majątkowych, a więc również komunikacyjnych, zmienną losową oznaczającą ryzyko portfela polis określa się za pomocą tak zwanego modelu kolektywnego

⁸ Ubezpieczenia komunikacyjne są tu rozumiane jako ubezpieczenia związane z pojazdami samochodowymi (*automobile insurance*)

ryzyka (por. pracę Ronki-Chmielowiec i in. [2000]). Formalny zapis modelu kolektywnego ryzyka dla portfela złożonego z wielu polis jest następujący:

1) Niech K będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód wygenerowanych przez portfel polis w danym okresie,

2) Niech X_1, X_2, \dots, X_K będą zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach oznaczającymi kolejne wartości roszczeń.

3) Niech zmienne losowe K, X_1, X_2, \dots, X_k będą wzajemnie niezależne

Zmienna losowa

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_K \quad (2.1)$$

oznacza całkowitą sumę roszczeń w badanym okresie dla badanego portfela, przy czym jeżeli $K=0$, to $Z=0$. W modelu kolektywnego ryzyka występuje więc podwójna losowość, gdyż rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Z oznaczającej ryzyko tego portfela zależy od rozkładu zmiennej losowej K oznaczającej liczbę szkód i rozkładu zmiennych losowych X_i , dla $i=1,2,\dots,K$, oznaczających wartości odszkodowań.

Ryzyko związane z pojedynczą polisą może być opisane za pomocą modelu analogicznego do kolektywnego modelu ryzyka opisującego cały portfel polis (por. Ostasiewicz i in. [2000]). W takim przypadku zmienna losowa K opisuje liczbę szkód przypadających na jednego ubezpieczonego, zmienne X_i oznaczają rozkłady wysokości tych szkód, natomiast zmienna losowa Z oznacza ryzyko związane z pojedynczym ubezpieczonym. Nazwa szkodowość będzie w dalszej części pracy odnosić się do wartości oczekiwanej rozkładu zmiennej losowej K w przypadku pojedynczego ubezpieczonego.

W praktyce, dla oceny ryzyka korzysta się z rozkładów empirycznych częstości szkód i ich wielkości lub odpowiednich rozkładów zmiennych losowych dopasowanych na podstawie danych statystycznych gromadzonych przez ubezpieczyciela.

Rozkłady zmiennych losowych⁹ wykorzystywane do charakterystyki ryzyka w dalszej części pracy przedstawione są w kolejnych podrozdziałach..

⁹ Informacje na temat przedstawionych rozkładów statystycznych oraz ich zastosowania w ubezpieczeniach zostały zaczerpnięte z prac Hosack'a, Pollard'a [1992] i Lemaire'a [1995].

2.1.1 Rozkłady liczby szkód

W dalszej części pracy będą wykorzystywane dwa rozkłady liczby szkód, których powszechnie używa się w literaturze do modelowania liczby szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Są to rozkład Poissona oraz rozkład ujemny dwumianowy. Rozkład Poissona jest odpowiedni do modelowania ryzyka związanego z pojedynczym kierowcą. Rozkład ujemny dwumianowy może być użyty do modelowania liczby szkód w portfelu złożonym z różnych ryzyk, lub gdy wariancja rozkładu powinna przewyższać wartość oczekiwaną.

Rozkład Poissona

Rozkład Poissona jest najczęściej stosowanym w literaturze przedmiotu rozkładem liczby szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Jest to rozkład dyskretny o funkcji prawdopodobieństwa danej wzorem

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \text{ dla } x=0,1,2,\dots; \lambda > 0 \quad (2.2)$$

Wzór ten może być wyprowadzony teoretycznie (por. Lemaire [1995]) przy założeniu trzech postulatów:

- 1) Prawdopodobieństwo wystąpienia wypadku w krótkim okresie czasu jest proporcjonalne do długości tego okresu i nie zależy od momentu rozpoczęcia okresu.
- 2) Prawdopodobieństwo spowodowania w krótkim okresie czasu więcej niż jednego wypadku jest bliskie zeru.
- 3) Liczby wypadków w rozłącznych okresach są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Założenia te dość dobrze oddają charakter ryzyka związanego z ubezpieczeniem pojazdu. Ryzyko jest proporcjonalne do czasu ekspozycji na nie. Mało prawdopodobne jest spowodowanie dwóch wypadków w bardzo krótkim czasie oraz liczba spowodowanych wypadków w jednym okresie jest niezależna od liczby wypadków spowodowanych w drugim, jeśli oczywiście są to okresy rozłączne. Rozkład Poissona jest jedynym rozkładem spełniającym trzy postawione wcześniej warunki. Wartość oczekiwana oraz wariancja rozkładu Poissona są jednakowe i równe parametrowi tego rozkładu, czyli λ . Odstępów czasu pomiędzy kolejnymi szkodami w procesie Poissona są niezależne i można je scharakteryzować zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią $\frac{1}{\lambda}$. Rozkład Poissona może być, ze względu na założenia, używany do modelowania liczby szkód

pojedynczego kierowcy lub ewentualnie homogenicznego portfela kierowców o określonej szkodowości.

Rozkład ujemny dwumianowy

Funkcja prawdopodobieństwa rozkładu ujemnego dwumianowego ma postać :

$$P(X = x) = \binom{k + x - 1}{x} p^k (1 - p)^x, \text{ dla } x = 0, 1, 2, \dots; 0 < p < 1 \quad (2.3)$$

Parametrami rozkładu są k i p . Wartość oczekiwaną i wariancję można obliczyć za pomocą wzorów:

$$EX = k(1-p)/p \quad (2.4)$$

$$D^2X = k(1-p)/p^2 \quad (2.5)$$

Użyteczną własnością rozkładu ujemnego dwumianowego jest fakt, że wariancja w tym rozkładzie jest większa od wartości oczekiwanej. Teoretyczne wyprowadzenie wzoru funkcji prawdopodobieństwa oparte jest na założeniu, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że ubezpieczony ulegnie x wypadkom w ciągu badanego okresu, jest określone rozkładem Poissona z parametrem λ . Na wartość tego parametru mogą mieć jednak wpływ różne czynniki zależne od czasu i związane bezpośrednio z ubezpieczonym (np. wiek kierowcy i jego doświadczenie, warunki atmosferyczne, stan bezpieczeństwa drogowego, itd.). Stąd każdy ubezpieczony z portfela może charakteryzować się innym parametrem λ . Przyjmijmy, że wartości parametru λ w portfelu mają rozkład gamma, innymi słowy parametr λ jest losowany z pewnego przedziału,

$$P(u < \lambda < u + du) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta u} (\beta u)^{\alpha-1} du. \quad (2.6)$$

Prawdopodobieństwo, że ubezpieczonemu zdarzy się x szkód zadane jest rozkładem Poissona

$$P(X = x / u < \lambda < u + du) = \frac{e^{-u} u^x}{x!}. \quad (2.7)$$

Podstawiając wzór (2.6) do (2.7) otrzymuje się prawdopodobieństwo tego, że losowo wybranemu ubezpieczonemu zdarzy się x szkód czyli

$$P(X = x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-u} u^x}{x!} \right) \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta u} (\beta u)^{\alpha-1} du, \quad (2.8)$$

co sprowadza się do

$$P(X = x) = \binom{\alpha + x - 1}{x} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^x. \quad (2.9)$$

Zmienna losowa ma więc rozkład ujemny dwumianowy z parametrami $k = \alpha$, $p = \beta / (1 + \beta)$, gdzie α i β są parametrami rozkładu gamma reprezentującego heterogeniczność ryzyka, oraz $\alpha = k$ i $\beta = p / (1 - p)$.

Przy $\alpha \rightarrow \infty$ i $\beta \rightarrow \infty$ rozkład ujemny dwumianowy dąży do rozkładu Poissona. Parametr α może być interpretowany jako miara stopnia „segmentacji” wypadków (grupowania danych względem liczby wypadków). Jeśli α jest duże, wówczas granice pomiędzy grupami rozmywają się i ich rozkład można przybliżać wtedy rozkładem Poissona. Jeśli α jest małe, wówczas użycie rozkładu ujemnego dwumianowego zamiast Poissona wydaje się właściwe, gdyż pogrupowanie danych wyraźnie zaznacza heterogeniczność.

2.1.2 Rozkłady wysokości szkód

Rozkład wysokości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych nie jest łatwy do modelowania. Wynika to przede wszystkim z faktu znacznego wpływu czynników geograficznych (im większe zagęszczenie samochodów tym częściej zdarzają się drobne kolizje) oraz ekonomicznych (stan oraz wartość poruszających się po drogach pojazdów). Nie można więc wskazać jednego rozkładu, który miałby wszechstronne zastosowanie. Z tego względu w praktyce najczęściej używa się empirycznego rozkładu szkód opartego na danych historycznych i dopasowanego do niego wybranego rozkładu teoretycznego. Rozkłady używane do modelowania wysokości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych są rozkładami określonymi jedynie na \mathbb{R}_+ , z jedną wartością modalną, silną lewostronną asymetrią i tak zwanym długim ogonem. Najczęściej używane rozkłady to: rozkład gamma, log-normalny, Pareto, Weibulla i in. W tej pracy używane są dwa z nich: logarytmiczno normalny i gamma.

Rozkład gamma

Rozkład gamma jest rozkładem ciągłym o funkcji gęstości

$$f(x) = \frac{x^{a-1} e^{-x/b}}{b^a \Gamma(a)}, \quad x > 0, \quad a, b > 0, \quad (2.10)$$

gdzie

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad \text{dla } a > 0; \quad \text{przy czym } \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

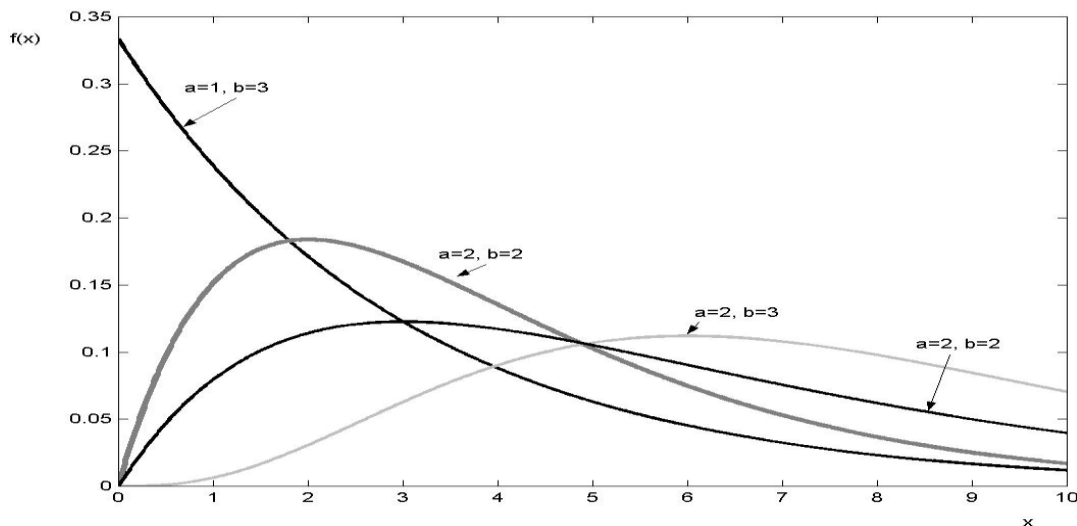
Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą w tym rozkładzie odpowiednio:

$$EX = a \cdot b, \quad (2.11)$$

$$D^2X = b^2 \cdot a. \quad (2.12)$$

O uniwersalności tego rozkładu może świadczyć wykres 2.1, na którym przedstawione są funkcje gęstości rozkładu gamma o różnych parametrach.

Wykres 2.1. Przykłady funkcji gęstości rozkładu gamma przy różnych parametrach



Źródło: Opracowanie własne

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma dla $\alpha = 1$ jest rozkład wykładniczy, charakteryzujący się przyjmowaniem największej wartości w punkcie $x=0$ i dużą lewostronną asymetrią. Dla większych wartości parametru α funkcja gęstości w punkcie $x=0$ ma wartość $f(x)=0$, a następnie wzrasta do wartości maksymalnej i maleje tworząc tak zwany ogon. Wraz ze wzrostem wartości parametru α asymetria rozkładu się zmniejsza.

Rozkład logarytmiczno-normalny

Rozkład logarytmiczno-normalny jest rozkładem ciągłym o funkcji gęstości

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0, \quad \mu, \sigma > 0. \quad (2.13)$$

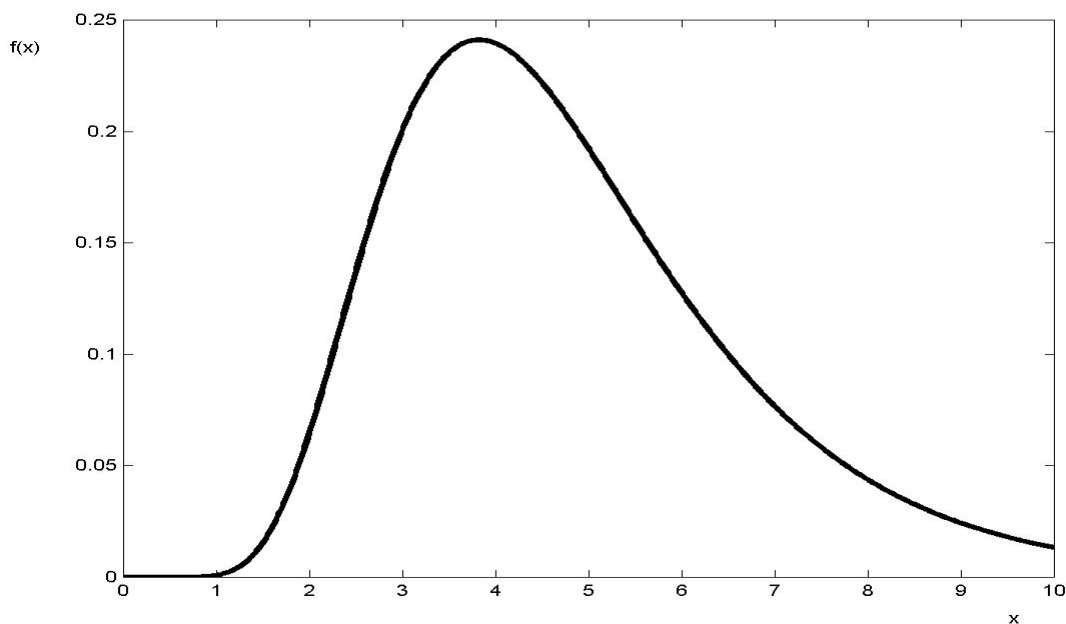
Zależności pomiędzy wartością oczekiwaną i wariancją, a parametrami μ, σ przedstawiają wzory:

$$EX = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}, \quad (2.14)$$

$$D^2X = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\}. \quad (2.15)$$

Przykładowa funkcja gęstości rozkładu log-normalnego przedstawiona jest na wykresie 2.2.

Wykres 2.2. Przykład funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu log-normalnego przy parametrach $\mu=1,5$ i $\sigma=0,5$



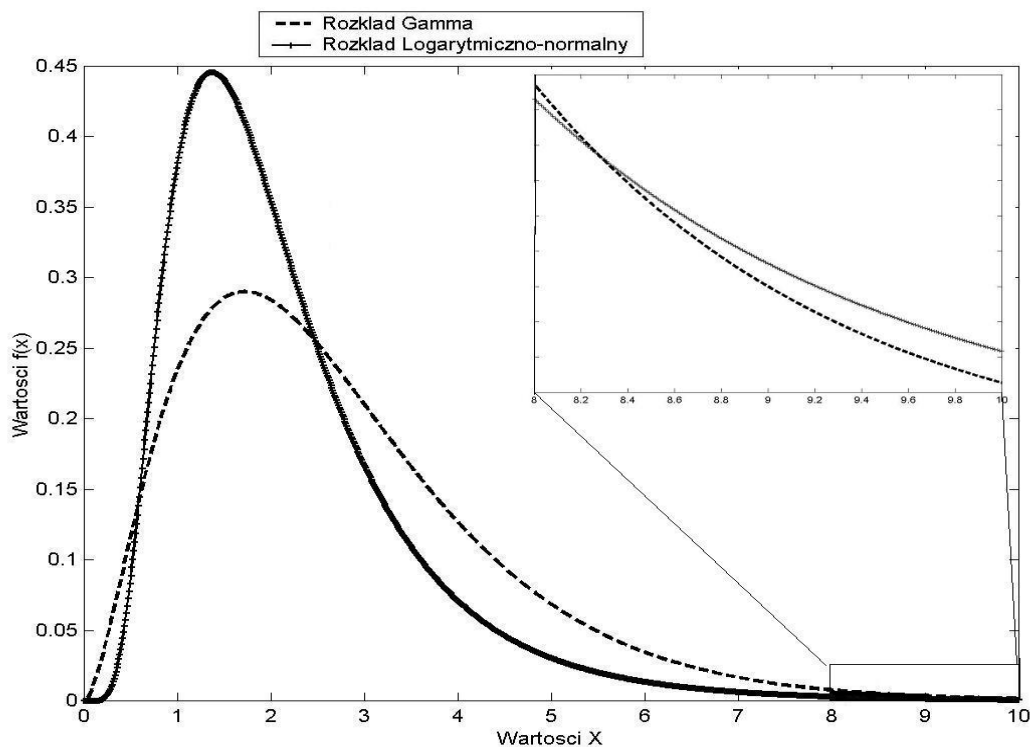
Źródło: Opracowanie własne

Rozkład logarytmiczno-normalny może dobrze opisywać wysokość szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych, gdyż dopuszcza on występowanie dużych szkód z relatywnie dużym prawdopodobieństwem, czyli jest rozkładem o tak zwanym grubym ogonie. Użycie tego rozkładu ma ponadto uzasadnienie empiryczne, gdyż wielokrotnie stwierdzono, że najlepiej pasował do danych empirycznych, dotyczących wysokości zgłaszanych szkód (między innymi na Tajwanie (por. Lemaire[1995], s.93) w 1989 roku i w Polsce w 1982 roku (por. Dudkowiak, Gwiazda [1982])).

Przykłady rozkładów gamma oraz logarytmiczno-normalnego

Wybór rozkładu wysokości szkód może poważnie wpłynąć na wyniki modelu. Na wykresie 2.3 przedstawione zostały rozkłady gamma oraz logarytmiczno-normalny o takich samych wartościach oczekiwanych $EX=2$ oraz wariancjach $D^2X=2$.

Wykres 2.3. Przykłady rozkładów gamma i logarytmiczno-normalnego o jednakowych wartościach oczekiwanych i wariancjach.



Źródło: Opracowanie własne

Wykres 2.3 wskazuje, że funkcja gęstości rozkładu gamma przy tych parametrach jest znacznie bardziej spłaszczona, większe jest też prawdopodobieństwo wystąpienia szkód bardzo małych. Pomimo to prawdopodobieństwo wystąpienia wyższych szkód (powyżej $x=10$) jest znacznie większe dla rozkładu logarytmiczno-normalnego, co zostało pokazane na zbliżeniu wartości obu funkcji dla $x \in \langle 8, 10 \rangle$.

2.2 Kalkulacja składek i system bonus-malus

Składka jest ceną, jaką płaci ubezpieczony za przejęcie ryzyka przez zakład ubezpieczeń. Istnieje wiele zasad kalkulacji składki (*principles of premium calculation*), czyli zasad przyporządkowujących wartość P rzeczywistą, dodatnią, oznaczającą składkę do wartości zmiennej losowej Z oznaczającej ryzyko. W dalszej części pracy używane będą dwie najprostsze: reguła składki netto oraz reguła wartości oczekiwanej.

Reguła składki netto oznacza, że $P=E(Z)$. Składka obliczona na tej podstawie nazywana jest składką netto. W przypadku kolektywnego modelu ryzyka stosowanego w

ubezpieczeniach komunikacyjnych składkę tę można przedstawić jako iloczyn wartości oczekiwanych rozkładów częstości i wysokości szkód (por. Gerber [1979])

$$P_{netto} = E(Z) = E(KX) = E(K)E(X). \quad (2.16)$$

Druga metoda nazywana jest zasadą wartości oczekiwanej. Składka w tym przypadku jest składką netto powiększoną o narzut bezpieczeństwa proporcjonalny do wartości oczekiwanej ryzyka $P = (1 + \lambda) E(Z)$ dla $\lambda > 0$. Składka obliczona w ten sposób nazywana jest dalej składką brutto i analogicznie do (2.13) można ją wyznaczyć jako iloczyn wartości oczekiwanych

$$P_{brutto} = (1 + \lambda) E(Z) = (1 + \lambda) E(K)E(X) = (1 + \lambda) P_{netto}. \quad (2.17)$$

Przy założeniu, że każdy z ubezpieczonych wnosiłby jednakowe ryzyko, wnioskując na podstawie danych empirycznych ubezpieczyciel mógłby wyznaczyć każdemu z ubezpieczonych jednakową składkę na podstawie przeciętnej częstości szkód oraz przeciętnej wysokości szkody. W praktyce jednak ryzyka, które wnoszą ubezpieczeni są bardzo różne, co rodzi potrzebę indywidualizacji składek.

Indywidualizacja składek w ubezpieczeniach komunikacyjnych w większości krajów opiera się na podziale ubezpieczonych według cech a priori oraz a posteriori. Obie metody mają na celu wyodrębnienie grup o możliwie jednorodnym poziomie ryzyka, co pozwala na dostosowanie wysokości składek do ryzyka związanego z każdą polisą oraz dokładniejsze oszacowanie przez zakład ubezpieczeń ryzyka dla całego portfela.

Taryfikacja na podstawie cech a priori w ubezpieczeniach komunikacyjnych uzależnia składkę od cech kierowcy i jego samochodu znanych jeszcze przed zawarciem umowy ubezpieczenia, takich jak wiek, płeć, zawód kierowcy, pojemność silnika samochodu itd. Metoda oceny na podstawie cech a priori sprawdza się w ubezpieczeniach na życie, lecz w ubezpieczeniach komunikacyjnych występuje szereg innych czynników, które trudno jest sprecyzować lub wręcz nie można uchwycić za pomocą oceny a priori. Mogą to być dla przykładu cechy związane z osobowością człowieka, jego umiejętnościami jako kierowcy itp.

Zarówno doświadczenia firm ubezpieczeniowych, jak badania teoretyczne (por. Lemaire [1985]) pokazują, że znacznie skuteczniejszą metodą oceny ryzyka, jakie wnosi ubezpieczony jest podział ubezpieczonych a posteriori, a więc uzależniający składkę płaconą przez ubezpieczonego od dotychczasowego przebiegu ubezpieczenia.

Najpopularniejszą z metod taryfikacji a posteriori w ubezpieczeniach komunikacyjnych jest system bonus-malus (SBM). Polega on na tym, że ubezpieczony, zależnie od liczby szkód zgłoszonych w ciągu ostatniego okresu ubezpieczenia, trafia do określonej klasy taryfowej. Klasy te różnią się między sobą wysokością składki oraz możliwościami przejścia do innych klas. Składką podstawową jest składka, jaką płaci kierowca po raz pierwszy

ubezpieczający się w danym zakładzie i nie mogący udokumentować, iż wcześniej jeździł bezszkodowo¹⁰. Dla pozostałych klas obliczanie składki zwykle dokonuje się poprzez przemnożenie składki podstawowej przez współczynnik właściwy danej klasie. Jeśli współczynnik ten jest mniejszy od 1 to jest to klasa z „bonusem” (łac. *bonus*-dobry), czyli zniżkowa, a jeśli większym niż 1, to jest to klasa z „malusem” (łac. *malus* – zły), czyli zwykła. W niektórych systemach występują tylko zniżki składki (*pure bonus system*), choć mimo to są one nazywane systemami bonus-malus, nazwa ta bowiem przyjęła się jako właściwa dla wszystkich tego typu systemów¹¹.

W niniejszej pracy przyjmuje się, że firma ubezpieczeniowa stosuje SBM, jeżeli spełnione są następujące warunki (por. Lemaire [1994], rozdział I):

- Polisy, należące do portfela określonego przez czynniki a priori są podzielone na skończoną liczbę klas C_i , $i=1,2,\dots,s$.
- Klasa, w której znajdzie się polisa w następnym roku ubezpieczenia jest uzależniona jedynie od klasy, w której polisa jest w poprzednim roku oraz od liczby roszczeń zgłoszonych w tym roku.
- W każdej klasie obowiązuje roczna składka o wysokości b_j dla $j=1,2,\dots,s$.
- Ustalona jest klasa początkowa C_{i0} do której trafiają nowe polisy.

Dla porządku można przyjąć, że im wyższy numer klasy tym bardziej zniżkowa jest klasa. W ten sposób klasę można utożsamić z jej numerem, czyli zbiorem klas jest zbiór $1,2,\dots,s$. Natomiast stawki (lub inaczej „poziomy składki”) w poszczególnych klasach $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$ wyrażone są jako procent składki podstawowej.

Podstawowym celem SBM jest dopasowanie składki do indywidualnego ryzyka, tak aby każdy w długim okresie płacił składkę odpowiadającą w przybliżeniu jego własnemu poziomowi ryzyka, mierzonego częstością szkód, co jest nazywane funkcją taryfikacyjną. Efektem takich działań firm ubezpieczeniowych jest z jednej strony sprawiedliwszy podział składki pomiędzy ubezpieczonych, a z drugiej motywacja do bezpieczniejszej jazdy i zapobieganie zjawisku *moral hazard* (czyli ujemnemu wpływowi faktu ubezpieczenia na zachowanie ubezpieczonych). W przypadku zjawiska *moral hazard* można mówić o funkcji prewencyjnej SBM (por. Sangowski i in [1994]), gdyż ubezpieczony mający świadomość, iż zostanie ukarany zwyżką składki zgłaszając szkodę ma większą motywację, aby być ostrożniejszym od kierowcy, który zawsze płaciłby taką samą składkę. Budowa SBM ma także duże znaczenie marketingowe. Zakładowi ubezpieczeń zależy na przyciągnięciu

¹⁰ Niektóre zakłady ubezpieczeń stosują odpowiednie zniżki składki, jeżeli nowy ubezpieczony może udokumentować, iż od określonego czasu jeździł bezszkodowo.

¹¹ W niektórych publikacjach pod pojęciem bonus i malus rozumie się względne zwyżki lub zniżki składki w stosunku do płaconej aktualnie.

klientów powodujących małą liczbę szkód, jednak SBM premiujący jedynie tych klientów mógłby spowodować odwrócenie się od zakładu ubezpieczeń pozostałych. Jest to jeden z powodów, oprócz ograniczeń ustawowych stosowanych w niektórych krajach, tego iż SBM różnicują zwykle składki w mniejszym stopniu niż wskazywałyby na to faktyczne różnice w szkodowości pomiędzy ubezpieczonymi.

Wartą podkreślenia cechą systemów bonus-malus jest to, iż klasa, do której trafi ubezpieczony w przyszłym okresie zależna jest jedynie od liczby, a nie od wysokości zgłoszonych szkód w obecnym okresie ubezpieczenia. Oznacza to, że wysokość szkód spowodowanych w danym okresie ubezpieczenia nie ma wpływu na wysokość składki ustalonej za pomocą tego systemu. SBM spełnia najlepiej funkcję taryfikacyjną, jeżeli spełnione jest założenie, że ryzyko ubezpieczonego związane jest ze zmienną losową oznaczającą liczbę szkód zgłaszanych przez niego przeciętnie w jednostce czasu, natomiast zmienne losowe oznaczające wartości szkód mają dla wszystkich kierowców identyczny rozkład. Innymi słowy, wielkość szkody nie zależy od tego, czy kierowca spowodował wcześniej kilkanaście wypadków, czy żadnego. Założenia te, wygodne i powszechnie stosowane w rozważaniach teoretycznych, nie muszą być jednak w pełni uzasadnione, co zostanie wykazane w dalszej części pracy.

W Polsce systemy bonus-malus wykorzystywane są w ubezpieczeniach komunikacyjnych odpowiedzialności cywilnej (OC) oraz autocasco (AC). Ubezpieczenie komunikacyjne OC jest obowiązkowym¹² ubezpieczeniem kierowców pojazdów mechanicznych od szkód związanych z ruchem tych pojazdów. Ubezpieczenie to chroni ubezpieczonego przed finansowymi konsekwencjami szkód, jakie może wyrządzić osobom trzecim użytkując swój pojazd. Ogólne warunki umowy są określane przez rozporządzenie ministra finansów¹³, co oznacza, że są one jednakowe dla wszystkich ubezpieczonych. W szczególności określona jest suma ubezpieczenia. Ubezpieczenia autocasco (AC) są ubezpieczeniami od uszkodzenia, zniszczenia lub kradzieży pojazdu, który użytkuje ubezpieczony. Wykupując polisę AC ubezpieczony może liczyć na uzyskanie odszkodowania, jeśli sam jest sprawcą wypadku, jeśli jest nim osoba nieznana lub jeśli szkodę spowodowały siły przyrody. Ponadto z polisy AC mogą być wypłacane również odszkodowania z tytułu kradzieży pojazdu lub jego wyposażenia. Ubezpieczenia AC mają charakter dobrowolny, a ogólne warunki ubezpieczenia takie jak: zakres ubezpieczenia, odpowiedzialność ubezpieczyciela, dochodzenie roszczeń itp. mogą być swobodnie kształtowane przez towarzystwa ubezpieczeniowe. W odróżnieniu od ubezpieczeń OC suma

¹² Obowiązek ubezpieczenia komunikacyjnego OC nakłada ustawa o działalności ubezpieczeniowej (Dz. U. 1996, Nr 11, poz. 62)

¹³ Aktualne rozporządzenie opublikowane zostało w: Dz. U. 2000, Nr 26, poz. 310

ubezpieczenia, stanowiąca górną granicę odpowiedzialności ubezpieczyciela zależy od umowy oraz od wartości przedmiotu ubezpieczenia.

Najczęściej wykorzystywanym sposobem prezentacji SBM przez zakłady ubezpieczeń jest przedstawienie go w formie tabeli. Jest to prosta i przejrzysta metoda przedstawienia reguł przejścia, klas i stawek, która zwykle jest dołączana do szczegółowych warunków umowy ubezpieczenia. Przykład takiej prezentacji SBM znajduje się w rozdziale 3.

2.3 Zjawisko łaknienia zniżki

Efektom funkcjonowania SBM jest także motywowanie kierowców do niezgłaszania szkód o małej wartości. Zjawisko to nazywane łaknieniem zniżki (*hunger for bonus*) polega na tym, iż ubezpieczonemu nie opłaca się zgłaszać szkód o niewielkich wartościach, ponieważ zgłaszając szkodę traci zniżkę (przesuwa się do niższej klasy w SBM), co może pociągnąć za sobą koszty większe niż wartość szkody. W sytuacji, gdy szkody nie przekraczają pewnej wysokości zwanej pułapem łaknienia zniżki, ubezpieczony woli sam pokryć straty spowodowane szkodą, niż informować o nich zakład ubezpieczeniowy, który wypłaci odszkodowanie, lecz jednocześnie podniesie składkę.

Zjawisko łaknienia zniżki pociąga za sobą ważne konsekwencje dla zakładu ubezpieczeń. Z jednej strony można je uznać za niepożądane. Z punktu widzenia aktuariusza fakt ukrywania przez ubezpieczonych niewielkich szkód sprawia, że dane o przeciętnej liczbie oraz wartości szkód przypadających na ubezpieczonego zostają zniekształcone przez brak informacji o niewielkich szkodach. W kontekście modelu ryzyka łaknienie zniżek powoduje różnice pomiędzy rozkładem szkód, które faktycznie zaszły, a rozkładem szkód obserwowanych, czego konsekwencjami są różnice pomiędzy szkodowością rzeczywistą, a więc wartością oczekiwaną rozkładu liczby szkód, które faktycznie przydarzyły się ubezpieczonemu oraz szkodowością efektywną, czyli wartością oczekiwaną liczby szkód, które obserwuje zakład ubezpieczeń. To z kolei pociąga za sobą nieprawidłową ocenę ryzyka. Zjawisko łaknienia zniżek poddaje także w wątpliwość dość powszechne teoretyczne założenie, że zmienne losowe charakteryzujące liczbę zgłaszanych szkód oraz oczekiwane wartości szkód są od siebie niezależne. Przeciwnie, jeżeli nawet założenie takie byłoby w rzeczywistości spełnione, zjawisko łaknienia zniżek może spowodować, iż obserwowane parametry rozkładów wysokości szkód i szkodowości będą ze sobą powiązane.

Z drugiej jednak strony niektórzy autorzy¹⁴ wskazują, że zjawisko to ma pozytywne cechy, a nawet może być jednym z powodów popularności SBM wśród zakładów ubezpieczeń. Zredukowanie liczby zgłaszanych małych szkód powoduje bowiem ograniczenie kosztów administracyjnych, gdyż jeśli szkoda jest niewielka, koszty poniesione w związku z obsługą ubezpieczonego stają się relatywnie wysokie w stosunku do wypłaconego odszkodowania. W tym przypadku efekt łąknienia zniżki spełnia w taryfikacji ubezpieczeń podobną rolę co udział własny ubezpieczonego w szkodzie, czyli fransyza integralna.

Efekt łąknienia zniżki jest ściśle związany z surowością systemu bonus-malus (por. Lemaire [1994], s.91). Im surowsze są reguły przejścia pomiędzy klasami, a co za tym idzie większa skuteczność taryfikacyjna systemu, tym bardziej do głosu dochodzi efekt łąknienia zniżki. Wysokość szkód, których nie opłaca się zgłaszać ubezpieczycielowi w danym SBM może także wskazywać na jego wadliwe działanie. Dla przykładu, bardzo wysoki pułap łąknienia zniżek w danym SBM świadczyć może o jego nadmiernej surowości, co prowadzi do wzmaganania przez system motywacji kierowców do uciekania z miejsca wypadku.

W dalszej części pracy efekt łąknienia zniżki będzie obiektem modelowania za pomocą krótko i długookresowego modelu Howarda. Model ten pozwala na wyznaczenie najbardziej opłacalnego pułapu łąknienia zniżki z punktu widzenia ubezpieczonego. Otrzymane wyniki mogą pod pewnymi warunkami zostać uogólnione na całą zbiorowość ubezpieczonych, co pozwala na badanie wpływu tego zjawiska na wskaźniki ubezpieczyciela.

¹⁴ Sugestia taka podana jest w pracy Taylora [1992].

Rozdział 3

Modelowanie systemów bonus- malus i zjawiska łaknienia niżek

Przedmiotem rozdziału jest budowa modelu systemu bonus-malus (SBM), mającego postać skończonego, jednorodnego łańcucha Markowa oraz opartego na tym łańcuchu modelu Howarda, a następnie przedstawienie sposobu jego wykorzystania do optymalizacji pułapów łaknienia niżek. Wszystkie teoretyczne rozważania są ilustrowane wynikami obliczeń otrzymanymi dla tego samego ustalonego wariantu modelu zbudowanego dla systemu istniejącego w PZU.

3.1 Podstawowe założenia modelu

Modelowanie zjawiska łaknienia niżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych za pomocą modelu Howarda wymaga przyjęcia ogólnych założeń, które można podzielić na założenia umożliwiające użycie modelu Howarda do modelowania optymalnych pułapów łaknienia niżki oraz założenia pozwalające na uogólnienia wyników, które dotyczą zachowań ubezpieczonych.

Założenia umożliwiające zastosowanie modelu są następujące:

- 1) Zjawisko łaknienia niżki badane jest w ubezpieczeniach z systemem bonus-malus
- 2) Okresem jednostkowym jest 1 rok
- 3) Składka ubezpieczeniowa obliczana jest na podstawie składki podstawowej oraz tabeli bonus-malus. Składka podstawowa w SBM równa jest składce brutto obliczonej za pomocą wzoru (2.17). Narzut związany jest z kosztami ponoszonymi przez ubezpieczyciela i w obliczeniach przedstawionych w dalszej części pracy jest on przyjęty na poziomie¹⁵ 60%.
- 4) Zmienne losowe oznaczające liczbę szkód oraz wysokości szkód są niezależne.
- 5) Ubezpieczony podejmuje decyzje i opłaca składkę na początku każdego rozpatrywanego okresu.

¹⁵ Taka wysokość narzutu została obliczona na podstawie danych z raportu dotyczącego ubezpieczeń komunikacyjnych w biuletynie PUNU za rok 2000.

- 6) Wszystkie parametry oraz zasady przejścia SBM nie zmieniają się w okresie modelowania
- 7) Zakład ubezpieczeń i ubezpieczony dysponują dokładną informacją na temat charakterystyk ryzyka ubezpieczonego.
- 8) Ubezpieczony jest racjonalny i w swoich decyzjach kieruje się minimalizacją kosztów. Założenie to umożliwia pominięcie innych czynników, które mogą wpłynąć na zachowanie ubezpieczonego, takich jak wartość straconego czasu, czy czynników psychologicznych.
- 9) Zbiór decyzji możliwych do podjęcia przez ubezpieczonego jest ograniczony jedynie do decyzji określających, do jakiej wysokości szkody nie będą przez niego zgłaszane ubezpieczycielowi.

Przyjęcie tych założeń pozwala na wykorzystanie łańcuchów Markowa do modelowania systemów bonus- malus. Modelem systemu jest łańcuch o stanach utożsamianych z numerami klas taryfikacyjnych systemu, a skoro liczba klas jest skończona, więc łańcuch jest skończony. Okresem przejścia (krokiem) tego łańcucha jest rok. Jest to łańcuch Markowa, ponieważ prawdopodobieństwo trafienia ubezpieczonego do ustalonej klasy w roku następnym zależy od tego, w której klasie ubezpieczony był w roku poprzednim i ile szkód w owym roku zgłosił, a nie zależy od klas, w których znajdował się wcześniej. Przy założeniu stałego w czasie rozkładu liczby szkód, ten łańcuch jest jednorodny. Wobec powyższego można stwierdzić, że modelem SBM jest skończony jednorodny łańcuch Markowa. Tak zbudowany model może być wykorzystany do konstrukcji łańcucha z wypłatami, który z kolei posłuży do wyznaczenia optymalnych pułapów łąknienia zniżki z punktu widzenia ubezpieczonego w danej firmie stosującej systemem bonus-malus.

Uogólnienie otrzymanych wyników na całą zbiorowość ubezpieczonych podlegających określone systemowi wymaga jednak powzięcia dodatkowych założeń:

- 10) Wszyscy ubezpieczeni zawierają umowy na jednakowych warunkach.
- 11) Każdy z ubezpieczonych potrafi wyznaczyć optymalny dla niego poziom łąknienia zniżki.

Założenie 10) jest bardzo mocnym założeniem , które umożliwia analizę łąknienia zniżek dla całego portfela ubezpieczeniowego, natomiast inną wersją założenia 11) jest przyjęcie, że w całej zbiorowości średni poziom łąknienia zniżek jest równy optymalnemu.

Warunki ubezpieczeń komunikacyjnych OC wydają się być odpowiednie zarówno, jeśli chodzi o założenia dotyczące modelowania łąknienia zniżki jak też umożliwiają one uogólnienie otrzymanych wyników.

W przypadku ubezpieczeń AC zastosowanie modelu powinno się ograniczać jedynie do badania odporności SBM na zjawisko łąknienia zniżki oraz obliczania optymalnych pułapów łąknienia zniżki dla pojedynczego ubezpieczonego.

Przeprowadzenie obliczeń wymaga przyjęcia szczegółowych założeń dotyczących:

- a) typów i parametrów rozkładów zmiennych losowych oznaczających liczby i wartości szkód
- b) wysokości stopy procentowej
- c) badanych wysokości poziomu łaknienia zniżki.

Przykładowe obliczenia ilustrujące formalną postać modelu w tym rozdziale oparte zostały na następujących szczegółowych założeniach dotyczących punktów a), b) i c):

- liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 0,3$, wartość szkody ma rozkład gamma z parametrami $a=2, b=1$
- roczna stopa procentowa wynosi $r=5\%$
- badane są dwie decyzje: decyzja $k=0$, która polega na zgłaszaniu wszystkich szkód oraz decyzja $k=1$, która polega na niezgłaszaniu szkód nie większych od 1.

3.2 Modelowanie systemów bonus-malus za pomocą łańcuchów

Markowa z wypłatami

3.2.1 System bonus-malus

Przykładem typowego systemu bonus-malus jest system obowiązujący w 2001 roku w PZU S.A. w ubezpieczeniach OC, przedstawiony w tabeli 3.1. W wierszach podane są numery klas taryfowych oraz odpowiadające im stawki. W trzech ostatnich kolumnach podane są natomiast reguły przejścia pomiędzy klasami, na które składają się: liczba lat bezszkodowej jazdy pozwalająca na osiągnięcie klasy o określonym numerze oraz numery klas, do których przechodzi ubezpieczony, jeśli zgłosi 1 lub 2 i więcej szkód w ciągu 12 miesięcy trwania ubezpieczenia.

Tabela 3.1 Tabela systemu bonus-malus firmy PZU

Klasa taryfowa	% składki podstawowej	Stawka/okres bezszkodowego przebiegu ubezpieczenia	Przemieszczenie w klasach taryfowych w zależności od przebiegu ubezpieczenia	
			po 1-szej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie	po 2-giej i następnej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie
1	150	stawka podwójnie zaostrzona	1	1
2	125	stawka zaostrzona	1	1
3	100	stawka podstawowa	2	1
4	90	1 rok	2	1
5	80	2 lata	3	2
6	80	3 lata	4	3
7	70	4 lata	5	3
8	60	5 lat	6	4
9	50	6 lat	7	5
10	50	7 lat	8	5
11	40	8 lat	9	6

Zródło: Warunki umowy OC pojazdów w PZU S.A.

SBM w ubezpieczeniach OC w PZU składa się z 11 klas. Osiem z nich stanowią klasy zniżkowe, dwie zwyżkowe oraz klasa początkowa, w której płaci się składkę podstawową. Po jednym roku bezszkodowej jazdy kierowca może przejść do pierwszej klasy zniżkowej. Każdy następny rok bezszkodowej jazdy powoduje, że ubezpieczony trafia do klasy o numerze o jeden wyższym. Po ośmiu kolejnych latach niezgłaszania szkód ubezpieczony zaczynający w klasie początkowej trafia do klasy 11, o największej zniżce, w której składka wynosi 40% składki podstawowej. Jeśli będąc w tej klasie zgłosi jedną szkodę, to trafia do klasy 9, w której składka wynosi 50% składki podstawowej, ale zgłaszając dwie lub więcej szkód trafi do klasy 6, w której może liczyć jedynie na 20% obniżkę składki w porównaniu ze składką podstawową. W klasie początkowej, zgłoszenie jednej szkody powoduje wzrost składki w następnym roku o 25%, a dwóch i więcej powoduje wzrost o 50%. Analogicznie przejścia mogą być opisane dla pozostałych klas na podstawie prezentowanej tabeli. W postaci takiej tabeli najczęściej przedstawiany jest system bonus- malus w szczegółowych warunkach umowy OC.

Inny, sformalizowany zapis reguł przejścia prezentowany jest poniżej. Jest on bardzo przydatny w rozważaniach teoretycznych, ponieważ pozwala w prosty sposób wyznaczyć macierze prawdopodobieństw przejścia oraz macierze kosztów opisujące SBM jako łańcuch Markowa z wypłatami. Posługując się tą metodą, reguły przejścia można przedstawić w formie funkcji transformujących T_d , takich, że $T_d(i)=j$, co oznacza iż ubezpieczony

przechodzi z klasy C_i do C_j w następnym okresie, jeśli w bieżącym okresie zgłosi d szkód (por. Lemaire [1995]). Wartości funkcji T_d można zapisać w formie macierzy

$$T_d = [t_{ij}^{(d)}], \quad (3.1)$$

gdzie $t_{ij}^{(d)} = 1$, jeżeli $T_d(i) = j$ oraz $t_{ij}^{(d)} = 0$ w pozostałych przypadkach.

Opis SBM firmy PZU można zatem, zamiast w sposób tabelaryczny jak w tabeli 3.1, przedstawić w postaci ciągu macierzy T_d oraz wektora \bar{b} :

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = T_3 = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b} = [1,5 \quad 1,25 \quad 1 \quad 0,9 \quad 0,8 \quad 0,8 \quad 0,7 \quad 0,6 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 0,4] \quad (3.2)$$

3.2.2 Macierz prawdopodobieństw przejścia

Modelując SBM za pomocą łańcucha Markowa przyjmuje się, że zbiór stanów S łańcucha jest zbiorem numerów klas taryfowych ze zbioru C . Numery klas są tak uporządkowane, że im większy jest numer klasy tym jest ona „lepiej”. Klasą obciążoną największymi zwyczajami jest klasa o numerze 1.

Macierz prawdopodobieństw przejścia tak określonego łańcucha Markowa można skonstruować w następujący sposób. Prawdopodobieństwa przesunięcia się ubezpieczonego z klasy i do klasy j w jednym okresie zależą od prawdopodobieństwa zgłoszenia przez ubezpieczonego określonej liczby szkód oraz od budowy samego SBM (prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy klasami, pomiędzy którymi nie można przechodzić, mają zerową wartość). Posługując się ciągiem macierzy określonym przez wzór (3.1), które pokazują, jakie przejścia pomiędzy stanami są możliwe oraz prawdopodobieństwami zgłoszenia określonej liczby szkód wyznaczonymi na podstawie jednego z przedstawionych w rozdziale 2 rozkładów częstości szkód, można wyznaczyć prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy poszczególnymi klasami. Korzystając ze wzoru (3.1) prawdopodobieństwa te można wyznaczyć z równości

$$p_{ij} = \sum_{d=0}^{\infty} p_d t_{ij}^{(d)}, \quad \text{przy czym } p_{ij} \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1 \quad (3.3)$$

gdzie p_d jest prawdopodobieństwem zgłoszenia przez ubezpieczonego d szkód w ciągu okresu.

Wobec powyższego macierz prawdopodobieństw przejścia jest określona następująco:

$$P = [p_{ij}] = \left[\sum_{d=0}^{\infty} p_d T_d \right] \quad (3.4)$$

W omawianym przykładzie SBM PZU macierz prawdopodobieństw przejścia ma postać

$$P = \left[\sum_{d=0}^{\infty} p_d T_d \right] = [p_0 T_0 + p_1 T_1 + \sum_{d=2}^{\infty} p_d T_d] = [p_0 T_0 + p_1 T_1 + (1 - p_0 - p_1) T_2] = \quad (3.5)$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p_0-p_1 & p_1 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p_0-p_1 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_0-p_1 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_0-p_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_0 \end{bmatrix},$$

gdzie: p_0 jest prawdopodobieństwem niezgłoszenia w ciągu roku żadnej szkody,

p_1 jest prawdopodobieństwem zgłoszenia jednej szkody,

$1-p_0$ jest prawdopodobieństwem zgłoszenia jednej i więcej szkód,

$1-p_0-p_1$ jest prawdopodobieństwem zgłoszenia dwóch i więcej szkód.

Gdy przyjmiemy, że liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 0,3$, macierz prawdopodobieństw przejścia dla SBM firmy PZU przedstawia się następująco:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2591 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2591 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0369 & 0,2222 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0369 & 0,2222 & 0 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0369 & 0,2222 & 0 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0369 & 0,2222 & 0 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0369 & 0 & 0,2222 & 0 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0369 & 0 & 0,2222 & 0 & 0 & 0,7408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0369 & 0 & 0,2222 & 0 & 0 & 0,7408 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0369 & 0 & 0 & 0,2222 & 0 & 0,7408 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0369 & 0 & 0 & 0,2222 & 0 & 0,7408 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.2.3 Macierz kosztów

Ubezpieczony ponosi co roku koszty składek związane z ochroną ubezpieczeniową. W przypadku, gdy zdecyduje się na niezgłaszanie części szkód może ponosić dodatkowo koszty związane z pokryciem szkód, których nie zgłosi ubezpieczycielowi. W tym miejscu rozważań przyjmijmy jednak, że ubezpieczony zgłasza wszystkie szkody. Zgodnie z założeniami, składkę w określonej przez system wysokości płaci kierowca na początku okresu objętego ochroną ubezpieczeniową. Przechodząc z klasy i do j ubezpieczony zapłaci zatem na początku roku, w którym będzie w klasie j , składkę odpowiadającą tej klasie. Na tej podstawie wszystkim przejściom pomiędzy klasami można przypisać określone wartości liczbowe, co z kolei pozwala skonstruować macierz kosztów.

Oznaczmy przez r_{ij} koszt składki poniesiony przez ubezpieczonego na początku roku w przypadku, gdy w roku poprzednim był w klasie i , a w obecnym jest w klasie j . Koszt taki ponoszony jest z prawdopodobieństwem p_{ij} , przy czym $i, j \in S$.

Elementy r_{ij} przyjmują wartości

$$r_{ij} = \begin{cases} b_j \cdot \exists_d t_{ij}^{(d)} = 1 \\ 0 \cdot \forall_d t_{ij}^{(d)} = 0 \end{cases} \quad \text{dla } i, j \in S. \quad (3.7)$$

Wzór ten oznacza, iż jeżeli przejście pomiędzy klasami jest możliwe, element r_{ij} jest kosztem, jaki ubezpieczony ponosi na początku okresu, w którym trafia do klasy j w systemie, natomiast jeżeli przejście pomiędzy klasami nie jest możliwe, to takiemu przejściu przypisany zostaje zerowy koszt.

Chcąc obliczyć wartość składki r_{ij} odwołamy się do wzoru (2.17) przyjmując wcześniejsze, przykładowe wartości parametrów oraz margines bezpieczeństwa 60%. Wartość oczekiwana rozkładu Poissona o parametrze $\lambda=0,3$ wynosi $EK=0,3$, natomiast rozkładu wysokości szkód gamma z parametrami $a=2$ i $b=1$ wynosi $EX=2$. Składka brutto płacona przez ubezpieczonego wynosi więc

$$P_{brutto} = (1 + 0,6) \cdot 0,3 \cdot 2 = 0,96.$$

Mając daną wartość składki brutto oraz wektor stawek \bar{b} można zbudować macierz kosztów $R=[r_{ij}]$. Macierz kosztów wyznaczona na podstawie przykładowych wartości liczbowych przedstawia się następująco:

$$R = \begin{bmatrix} 1,44 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,44 & 0 & 0,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,44 & 1,2 & 0 & 0,864 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,44 & 1,2 & 0 & 0,864 & 0,768 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0,96 & 0 & 0 & 0,768 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,96 & 0,864 & 0 & 0 & 0,672 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,96 & 0 & 0,768 & 0 & 0 & 0,576 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,864 & 0 & 0,768 & 0 & 0 & 0,48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,768 & 0 & 0,672 & 0 & 0 & 0,48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,768 & 0 & 0 & 0,576 & 0 & 0 & 0,384 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,768 & 0 & 0 & 0,48 & 0 & 0,384 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

3.2.4 Model systemu bonus-malus, rozkład początkowy i rozkład stacjonarny

Rozkład początkowy w modelowaniu SBM za pomocą łańcucha Markowa oznacza rozkład prawdopodobieństw, iż ubezpieczony na początku analizy będzie w poszczególnych klasach. Dla przykładu, jeżeli ubezpieczony w PZU znajduje się w klasie trzeciej, to rozkład początkowy (czyli w chwili $n=0$) będzie miał postać

$$d_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.9)$$

Używając wzoru (1.13) dla zdefiniowanych: rozkładu początkowego d_0 i macierzy prawdopodobieństw przejścia P , można wyznaczyć bezwarunkowe rozkłady w kolejnych okresach d_n .

W długookresowej analizie SBM rozkład początkowy nie ma znaczenia, ponieważ każdy SJŁM służący do modelowania systemu bonus–malus ma regularną macierz prawdopodobieństw przejścia. Oznacza to, że absolutne rozkłady prawdopodobieństw przejścia zbiegają do jednego rozkładu granicznego, który jest niezależny od rozkładu początkowego i jest jedynym rozkładem stacjonarnym. Własność regularności macierzy prawdopodobieństw przejścia wynika z cech systemów bonus–malus. W każdym z systemów przynajmniej w przypadku jednej klasy prawdziwe jest stwierdzenie, że jest ona możliwa do osiągnięcia z każdej innej klasy w skończonej liczbie kroków. Prowadzi to do wniosku, iż dla skończonego n istnieje taka potęga macierzy P , że przynajmniej jedna kolumna zawiera same elementy dodatnie. Na mocy twierdzenia ergodycznego (por. 1.1) macierz taka jest regularna. Dla macierzy (3.6) dodatnie kolumny uzyskuje się już podnosząc macierz P do trzeciej potęgi¹⁶.

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0,1371 & 0,3139 & 0,1422 & 0,4065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1371 & 0,1919 & 0,2641 & 0 & 0,4065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0803 & 0,1268 & 0,2641 & 0,1219 & 0 & 0,4065 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0437 & 0,1229 & 0,0608 & 0,3658 & 0 & 0 & 0,4065 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0316 & 0,0985 & 0,0568 & 0,0405 & 0,3658 & 0 & 0 & 0,4065 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0194 & 0,0314 & 0,1158 & 0,0405 & 0,0203 & 0,3658 & 0 & 0 & 0,4065 & 0 & 0 \\ 0,0084 & 0,0241 & 0,0243 & 0,1097 & 0,0608 & 0 & 0,3658 & 0 & 0 & 0,4065 & 0 \\ 0,0046 & 0,0158 & 0,0304 & 0,0061 & 0,13 & 0,0405 & 0 & 0,3658 & 0 & 0 & 0,4065 \\ 0,001 & 0,0065 & 0,0191 & 0,0304 & 0 & 0,1502 & 0,0203 & 0 & 0,3658 & 0 & 0,4065 \\ 0,001 & 0,0036 & 0,0048 & 0,0292 & 0,0182 & 0,0203 & 0,1502 & 0 & 0,1219 & 0,2439 & 0,4065 \\ 0,0004 & 0,0024 & 0,0057 & 0,0071 & 0,0353 & 0,0263 & 0,0568 & 0,0934 & 0,1219 & 0,1219 & 0,5285 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Rozkład stacjonarny prawdopodobieństw trafienia do określonych klas w SBM można zatem obliczyć korzystając ze wzoru (1.14). Rozkład stacjonarny interpretuje się jako rozkład prawdopodobieństw trafienia do poszczególnych stanów przy nieskończonej odległym horyzoncie czasowym, czyli w praktyce po długim okresie. Dla macierzy (3.6) jest to wektor:

$$\pi = [0,0266 \ 0,0470 \ 0,0538 \ 0,0653 \ 0,0762 \ 0,0852 \ 0,0901 \ 0,0868 \ 0,1214 \ 0,0899 \ 0,2571].$$

¹⁶ W tym miejscu liczba w górnym indeksie oznacza wykładnik potęgi

3.3 Wykorzystanie decyzyjnego łańcucha Markowa do wyboru optymalnego poziomu łąknienia zniżki

W poprzednim rozdziale pokazane zostało, w jaki sposób do modelowania SBM można użyć łańcucha Markowa z wypłatami. Znając charakterystyki ryzyka ubezpieczonego, można przypisać mu macierz prawdopodobieństw przejścia oraz kosztów. Obie macierze zmieniają się, jeżeli ubezpieczony podejmie decyzję k , że nie będzie zgłaszał szkód o wartości nie większej niż pewna kwota x_i^k . Macierz kosztów R^k w tej sytuacji będzie składała się z elementów będących sumą składki i oczekiwanej wartości niezgłoszonych kosztów.

Niezgłaszanie części szkód powoduje także, że mimo tej samej szkodowości rzeczywistej zmniejsza się szkodowość kierowcy obserwowana w zakładzie ubezpieczeń, czyli szkodowość efektywna, a co za tym idzie zwiększają się prawdopodobieństwa przejścia ubezpieczonego do stanów o wyższych numerach, czyli zmieniają się elementy macierzy P^k . W celu wyznaczenia optymalnego z punktu widzenia ubezpieczonego pułapu łąknienia zniżki k^* stosuje się optymalizację za pomocą decyzyjnego łańcucha Markowa, która została przedstawiona w rozdziale 1. Przestrzeń stanów tworzą klasy SBM, natomiast sposoby wyznaczania zbioru decyzji K oraz macierzy $P^k = [p_{ij}^k]$ i $R^k = [r_{ij}^k]$ odpowiadających poszczególnym decyzjom przedstawione są w kolejnych podrozdziałach.

3.3.1 Zbiór decyzji

Decyzje możliwe do podjęcia przez ubezpieczonego dotyczą maksymalnej wartości niezgłoszonej szkody, zwanej pułapem łąknienia zniżki. Obliczenia numeryczne wymagają, aby zbiór możliwych decyzji K dla potrzeb dalszej części pracy został zdefiniowany w ścisły sposób. Otóż, zbiorem możliwych decyzji K w stanie i jest zbiór pułapów łąknienia zniżki tworzących skończony ciąg arytmetyczny $\{x_i^k\}$. Różnica pomiędzy wyrazami w tym ciągu nazwana jest interwałem i oznaczana jako INT , natomiast pierwszym wyrazem ciągu jest $x_i^0 = 0$. Zatem decyzja o numerze $k=0$ oznacza zgłaszanie wszystkich szkód. Zależność

między numerem decyzji oraz wartością pułapu łaknienia zniżki z nim związanym przedstawia zależność

$$x_i^{(k)} = k \cdot INT. \quad (3.11)$$

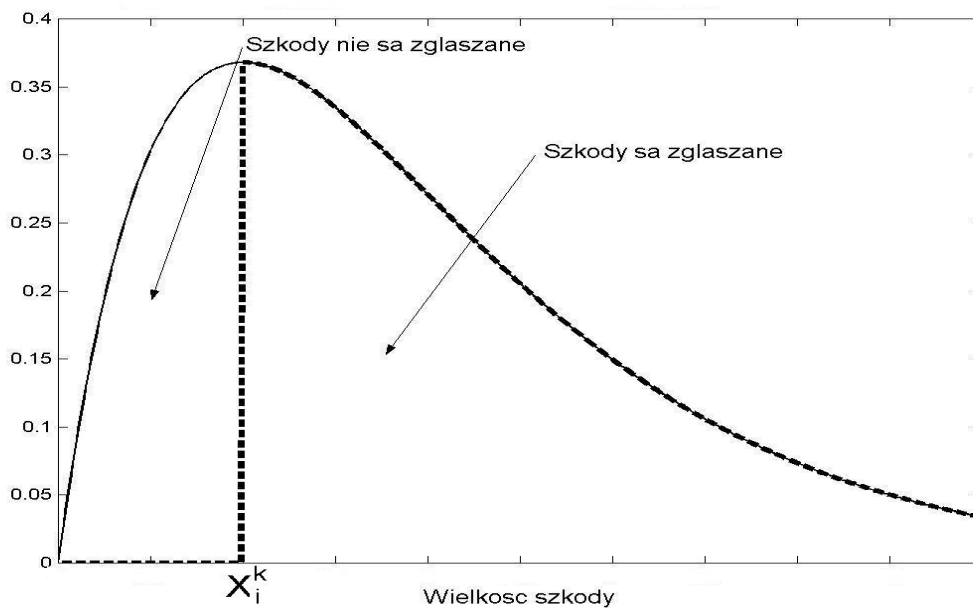
Zbiory możliwych decyzji dla wszystkich stanów są identyczne.

Zbiór decyzji powstały na podstawie przykładowych założeń jest zbiorem dwuelementowym o elementach $x_i^0 = 0$ i $x_i^1 = 1$. Interwał wynosi $INT = 1$.

3.3.2 Macierze prawdopodobieństw przejścia dla poszczególnych decyzji

Zatajanie szkód o wartości nie większej niż pułap x_i^k przez kierowcę w klasie i prowadzi do zmian prawdopodobieństw przejścia w macierzy P . Zgodnie z założeniami rozkład wysokości szkód jest pewnym wybranym rozkładem teoretycznym (gamma lub logarytmiczno- normalnym). Decyzja k , jaką podejmuje ubezpieczony wybierając pułap łaknienia zniżki na poziomie x_i^k , jest przedstawiona na wykresie 3.1.

Wykres 3.1. Prawdopodobieństwo zgłoszenia i niezgłoszenia szkody



Źródło: Opracowanie własne

Prawdopodobieństwo zatajenia szkody równe jest

$$p_i^k = \int_0^{x_i^k} f(x) dx, \quad (3.12)$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją gęstości rozkładu wysokości szkód.

Za każdym razem, gdy ubezpieczonemu z klasy i zdarzy się szkoda, zgłasza on ją ubezpieczycielowi z prawdopodobieństwem $1 - p_i^k$ lub zataja z prawdopodobieństwem p_i^k . Prawdopodobieństwo tego, że ubezpieczony z klasy i zgłosi d szkód spośród h , jakie zaszły w jednostkowym okresie czasu, można obliczyć korzystając z rozkładu dwumianowego¹⁷

$$P(S_h = d) = \binom{h}{d} (1 - p_i^k)^d (p_i^k)^{h-d}. \quad (3.13)$$

Korzystając z (3.13) oraz rozkładu prawdopodobieństwa $p(h)$ zdarzenia się ubezpieczonemu h szkód, rozkład zgłoszenia przez ubezpieczonego d szkód można wyznaczyć posługując się wzorem

$$p_{i,d}^k = \sum_{h=d}^{\infty} p(h) \binom{h}{d} (1 - p_i^k)^d (p_i^k)^{h-d}. \quad (3.14)$$

Wykorzystując powyższy wzór można wyznaczyć wszystkie potrzebne prawdopodobieństwa $p_{i,d}^k$ zgłoszenia przez ubezpieczonego określonych liczb szkód w okresie, w którym przebywa on w stanie i oraz stosuje się do decyzji k , co wystarczy do konstrukcji macierzy prawdopodobieństw przejścia $P^k = [p_{ij}^k]$.

Odwołując się do przykładowych obliczeń, otrzymujemy, że przy pułapie łaknienia zniżki $x_i^1=1$, prawdopodobieństwo tego, że szkoda nie zostanie zgłoszona wynosi $p_i^1=0,2642$ dla $i=1,2,\dots,s$. Prawdopodobieństwa zgłoszenia przez ubezpieczonego określonej liczby szkód, jeśli zgłasza on wszystkie szkody oraz obliczone na podstawie wzoru (3.14), jeśli nie zgłasza szkód do wartości $x_i^1=1$, przedstawia tabela 3.2.

Tabela 3.2. Rozkład prawdopodobieństw zgłoszenia określonej liczby szkód dla przykładowych pułapów łaknienia zniżki

Liczba szkód	Decyzja	
	k=0	k=1
0	0,74081822	0,80193505
1	0,22224547	0,17700925
2	0,03333682	0,01953539
3	0,00333368	0,00143722
4	0,00025003	0,00007908

Źródło: Obliczenia własne

Macierz prawdopodobieństw przejścia w przypadku, gdy ubezpieczony podejmie decyzję o niezgłaszaniu szkód nie większych od 1 ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0,1981 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1981 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0211 & 0,177 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁷ We wzorach (3.13) i (3.14) symbol k w górnym indeksie oznacza decyzję, natomiast d i $h-d$ są wykładnikami potęgi.

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0,0211 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0211 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0211 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0211 & 0 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0211 & 0 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0211 & 0 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0211 & 0 & 0 & 0,177 & 0 & 0 & 0,8019 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0211 & 0 & 0 & 0,177 & 0 & 0,8019 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

3.3.3 Macierze kosztów dla poszczególnych decyzji

Ubezpieczony, planując niezgłaszanie szkody ubezpieczycielowi do wartości x_i^k musi wziąć pod uwagę koszty, jakie będzie musiał ponieść w związku ze szkodami, których nie zgłosi. Rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia tych kosztów w określonej wysokości jest rozkładem wystąpienia szkód nie większych niż x_i^k , czyli jest to rozkład wysokości szkód, w którym odcięta została część powyżej x_i^k . Analogicznie rozkład szkód, który przy strategii k obserwuje zakład ubezpieczeń, jest rozkładem szkód, w którym odcięta została część rozkładu przy x mniejszych lub równych x_i^k . Funkcje gęstości takich rozkładów wyrażają wzory przedstawione poniżej.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zgłoszenia szkody ma postać

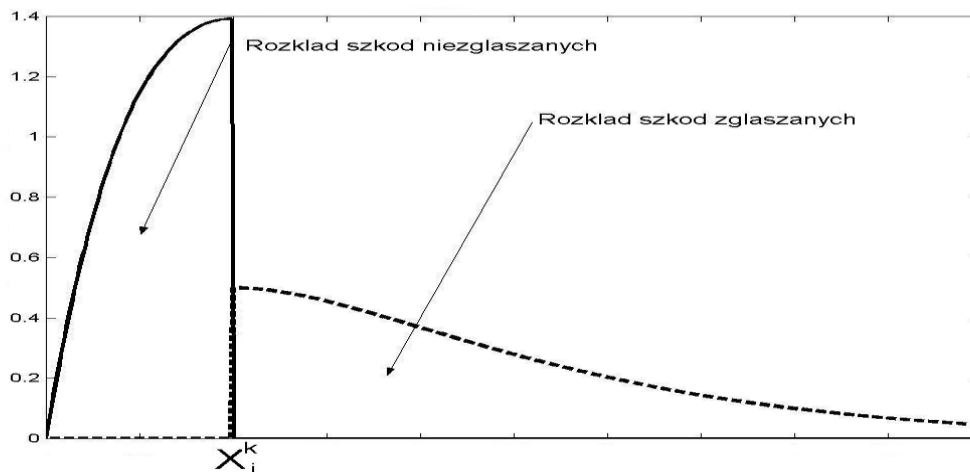
$$f_{ZG}^k(x) = \frac{f(x)}{1 - \int_0^{x_i^k} f(x) dx}. \quad (3.16)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa niezgłoszenia szkody ma postać

$$f_{NZG}^k(x) = \frac{f(x)}{\int_0^{x_i^k} f(x) dx}. \quad (3.17)$$

Na wykresie 3.2 przedstawione zostały oba rozkłady: wysokości szkód zgłoszonych oraz niezgłoszonych, przy pułapie łaknienia zniżki na poziomie x_i^k .

Wykres 3.2. Rozkłady szkód zgłaszanych i niezgłaszanych przy ustalonym pułapie łaknienia zniżki



Źródło: opracowanie własne.

Dodatkowy koszt, jakiego ubezpieczony może się spodziewać nie zgłaszając szkód do wysokości x_i^k jest wartością oczekiwaną rozkładu szkód niezgłaszanych, natomiast wartość oczekiwana szkody, która zostanie zgłoszona jest równa wartości oczekiwanej rozkładu szkód zgłoszonych. Wartość oczekiwana jednej niezgłoszonej szkody dla kierowcy w klasie i podejmującego decyzję k jest zatem równa

$$y_i^k = \frac{1}{p_i^k} \int_0^{x_i^k} xf(x)dx = \frac{\int_0^{x_i^k} xf(x)dx}{\int_0^{x_i^k} f(x)dx}. \quad (3.18)$$

W prezentowanym przykładzie koszt ten zależy od zakładanego poziomu łaknienia zniżki i i jest przedstawiony w tabeli 3.3.

Tabela 3.3. Koszty niezgłaszanych szkód dla przykładowych pułapów łaknienia zniżki

	k=0	k=1
x_i^k	0	1
y_i^k	0	0,6078

Źródło: Obliczenia własne

Wartość oczekiwana jednej zgłoszonej szkody dla kierowcy w klasie i jest równa

$$m_i^k = \frac{1}{1-p_i^k} \int_{x_i^k}^{\infty} xf(x)dx = \frac{\int_{x_i^k}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{x_i^k}^{\infty} f(x)dx}. \quad (3.19)$$

Przykładowe wartości oczekiwane niezgłoszonych szkód prezentowane są w tabeli 3.4

Tabela 3.4. Wartość oczekiwana niezgłaszanych szkód dla przykładowych pułapów łaknienia zniżki

	k=0	k=1
x_i^k	0	1
m_i^k	2	2,45

Źródło: Obliczenia własne

Na podstawie wzoru (3.14) można obliczyć oczekiwaną liczbę szkód jaką będzie obserwował ubezpieczyciel, czyli efektywną szkodowość w klasie i za pomocą wzoru:

$$\lambda_i^k = \sum_{d=0}^{\infty} dp_{i,d}^k(\lambda). \quad (3.20)$$

Wracając do przykładu, szkodowości efektywne dla przykładowych pułapów łaknienia zniżki, równe we wszystkich klasach i , przedstawione są w tabeli 3.5.

Tabela 3.5. Efektywna szkodowość dla przykładowych pułapów łaknienia zniżki

	k=0	k=1
x_i^k	0	1
λ_i^k	0,3	0,221

Źródło: Obliczenia własne

Oczekiwana liczba szkód, jakich ubezpieczony nie zgłosi, stanowi różnicę pomiędzy szkodowością rzeczywistą, a szkodowością efektywną czyli $\lambda - \lambda_i^k$. W zależności od przyjętego pułapu łaknienia zniżki oczekiwana liczba niezgłoszonych szkód przedstawiona została w tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Oczekiwana liczba niezgłoszonych szkód dla przykładowych pułapów łaknienia zniżki

	k=0	k=1
x_i^k	0	1
$\lambda - \lambda_i^k$	0	0,079

Źródło: Obliczenia własne

Oczekiwany roczny koszt nie zgłoszonych szkód dla kierowcy z klasy i przy decyzji k jest iloczynem oczekiwanej wartości niezgłoszonej szkody oraz oczekiwanej liczby niezgłoszonych szkód, czyli wynosi

$$y_i^k(\lambda - \lambda_i^k). \quad (3.21)$$

W zależności od pułapu przedstawiony on został w tabeli 3.7.

Tabela 3.7. Roczny koszt niezgłaszanych szkód dla przykładowych pułapów łąknienia zniżki

	k=0	k=1
x_i^k	0	1
$y_i^k(\lambda - \lambda_i)$	0	0,0482

Źródło :Obliczenia własne

Całkowity koszt, jakiego ubezpieczony niezgłaszający części szkód może spodziewać się przy przejściu z klasy i do j , stanowi suma składki należnej w klasie j oraz oczekiwanego kosztu nie zgłoszonych szkód, co można wyrazić wzorem

$$r_{ij}^k = r_{ij} + y_j^k(\lambda - \lambda_j^k), \text{ dla } r_{ij} > 0, \quad (3.22)$$

zaś w pozostałych przypadkach $r_{ij}^k = 0$.

Na tej podstawie wyznacza się macierze kosztów poszczególnych decyzji $R^k = [r_{ij}^k]$. W omawianym przykładzie, dla decyzji zatajania szkód nie większych od 1 macierz kosztów przedstawia się następująco:

$$R^1 = \begin{bmatrix} 1,4882 & 1,2482 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,4882 & 0 & 1,0082 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,4882 & 1,2482 & 0 & 0,8942 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,4882 & 1,2482 & 0 & 0,8942 & 0,8162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2482 & 1,0082 & 0 & 0 & 0,8162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0082 & 0,8942 & 0 & 0 & 0,7202 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0082 & 0 & 0,8162 & 0 & 0 & 0,6242 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8942 & 0 & 0,8162 & 0 & 0 & 0,5282 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8162 & 0 & 0,7202 & 0 & 0 & 0,5282 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8162 & 0 & 0 & 0,6242 & 0 & 0 & 0,4322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8162 & 0 & 0 & 0,5282 & 0 & 0,4322 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.3.4 Zastosowanie długo i krótkookresowego modelu Howarda do wyznaczania optymalnego poziomu łąknienia zniżki

Modelowanie łąknienia zniżek opiera się na założeniu, że ubezpieczony podejmuje decyzję, do jakiej wysokości szkód nie zgłasza, wybierając taki poziom maksymalnej niezgłaszanej szkody, który minimalizuje sumę zdyskontowanych kosztów składek i niezgłoszonych szkód w kolejnych latach. Do wyznaczenia optymalnych dla ubezpieczonego decyzji k^* zastosowany jest krótko i długookresowy model Howarda. Obie metody, iteracyjna i rekurencyjna, służące do budowy tych modeli zostały przedstawione w rozdziale 1, natomiast ich implementacja do modelowania zjawiska łąknienia zniżek zostanie

przedstawiona w tym rozdziale. Ze względu na konieczność zastosowania bardzo licznego zbioru decyzji dla uzyskania pożądanej dokładności, procedura modelowania zostanie zilustrowana jedynie krótkim przykładem.

Model krótkookresowy – metoda rekurencyjna

Zastosowanie modelu krótkookresowego do wyznaczania optymalnego poziomu łaknienia zniżki pozwala na wyznaczenie tych poziomów w zależności od czasu (w latach), jaki ubezpieczony planuje spędzić w systemie.

Zjawisko łaknienia zniżki występuje, jeżeli okres ubezpieczenia wynosi przynajmniej dwa lata. Wiąże się to z cechą SBM, którą jest ocenianie kierowcy a posteriori, a więc po pewnym okresie ubezpieczenia oraz płaceniem składki z góry. Jeśli zatem ubezpieczony planuje ubezpieczenie na 1 rok nie może liczyć na żadne ewentualne zniżki, a co za tym idzie najkorzystniejszą decyzją z jego punktu widzenia jest zgłaszanie wszystkich szkód. Koszty całkowite $v_i(0)$ jakie ubezpieczony ponosi pozostając w systemie tylko 1 rok, jeżeli jest w klasie i , są zatem po prostu kosztami składek.

Jeżeli ubezpieczony będzie w systemie dłużej niż rok, to oczekiwany koszt, jaki będzie ponosił w jednym okresie podejmując decyzję k i będąc na początku okresu w stanie i , można obliczyć za pomocą wzoru (1.31), czyli

$$q_i^k = \sum_{j=1}^s p_{ij}^k r_{ij}^k .$$

Następnie należy odwołać się do wzorów (1.32) oraz (1.33), co w przypadku modelowania łaknienia zniżki w ubezpieczeniach komunikacyjnych oznacza przyjęcie następującej procedury. Na podstawie kosztów optymalnej strategii obliczonych dla okresu wcześniejszego $v_j^*(n-1)$ oblicza się dla każdej decyzji k koszty, jakie zostaną poniesione w związku z podjęciem tej decyzji w okresie n , za pomocą wzoru (1.32), czyli

$$v_i(n) = q_i^k + \vartheta \sum_{j=1}^s p_{ij}^k v_j^*(n-1), \quad i=1,2,\dots,s, \quad k \in K.$$

Następnie spośród decyzji wybiera się tę, która minimalizuje te koszty. Ta decyzja staje się kolejną decyzją w strategii optymalnej, a koszty z nią związane są kosztami tej strategii dla okresu n . Procedurę tę powtarza się, aż do uzyskania optymalnej strategii dla zakładanego horyzontu czasowego.

Procedurę tę można prześledzić na omawianym wcześniej przykładzie, w którym zbiór decyzji jest dwuelementowy. W pierwszym roku koszty związane z decyzjami dla poszczególnych stanów przedstawia tabela 3.8.

Tabela 3.8. Wybór optymalnych decyzji za pomocą modelu krótkookresowego dla przykładowych paupów łaknienia niżki. Jednokresowy horyzont strategii

Stan (i)	Koszt $v_i^k(1)$		Decyzja optymalna k^*	Koszt decyzji optymalnej $v_i^*(1)$
	k=0	k=1		
1	1,44	1,4882	0	1,44
2	1,2	1,2482	0	1,2
3	0,96	1,0082	0	0,96
4	0,864	0,9122	0	0,864
5	0,768	0,8162	0	0,768
6	0,768	0,8162	0	0,768
7	0,672	0,7202	0	0,672
8	0,576	0,6242	0	0,576
9	0,48	0,5282	0	0,48
10	0,48	0,5282	0	0,48
11	0,384	0,4322	0	0,384

Źródło: Obliczenia własne

Korzystając ze wzoru (1.33) można wyznaczyć optymalny paup łaknienia niżek przy horyzoncie dwuokresowym, co jest przedstawione w tabeli 3.9.

Tabela 3.9. Wybór optymalnych decyzji za pomocą modelu krótkookresowego dla przykładowych paupów łaknienia niżki. Dwuokresowy horyzont strategii

Stan (i)	Koszt $v_i^k(2)$		Decyzja optymalna k^*	Koszt decyzji optymalnej $v_i^*(2)$
	k=0	k=1		
1	1,8715	2,4804	0	1,8715
2	2,1052	2,1052	1	2,1052
3	1,8715	1,8722	0	1,8715
4	1,7329	1,7222	1	1,7222
5	1,6116	1,6295	0	1,6116
6	1,4141	1,4364	0	1,4141
7	1,2338	1,2532	0	1,2338
8	1,0883	1,0991	0	1,0883
9	1,0397	1,0621	0	1,0397
10	0,8595	0,8789	0	0,8595
11	0,8179	0,8457	0	0,8179

Źródło: Obliczenia własne

Analogiczne obliczenia przeprowadzone dla kolejnych okresów pozwalają na wyznaczenie kolejnych decyzji optymalnych, które składają się na optymalną strategię.

Tą metodą strategia może być wyznaczona przy dowolnie odległym horyzoncie czasowym.

W praktyce, jak to zostanie pokazane w rozdziale 4, przy horyzoncie kilkunasto –

kilkudziesięcioletnim pułapy łaknienia zniżek obliczone tą metodą zbiegają do pułapów granicznych wyznaczonych przez model długookresowy.

Model długookresowy – metoda iteracyjna

Zastosowanie długookresowego modelu Howarda do wyznaczania optymalnego poziomu łaknienia zniżki pozwala na wyznaczenie tych poziomów dla ubezpieczonego, który pozostawałby nieskończenie długo w tym samym systemie przy niezmiennych się założeniach. W praktyce metoda ta pozwala na dobre modelowanie przy horyzoncie kilkunasto lub kilkudziesięcioletnim. Stosując długookresowy model Howarda wykorzystuje się własność łańcucha Markowa użytego do modelowania SBM polegającą na dążeniu bezwarunkowego rozkładu prawdopodobieństw tego łańcucha do rozkładu stacjonarnego.

Procedura otrzymywania optymalnych decyzji, które ze względu na długookresowy charakter tej metody są jednocześnie strategiami, została przedstawiona w rozdziale 1. W skrócie: metoda iteracyjna jest algorytmem pozwalającym w szybki sposób wybrać spośród wielu decyzji charakteryzowanych przez macierze prawdopodobieństw przejścia P^k oraz kosztów R^k taką, która minimalizuje koszty.

W analizowanym przykładzie dysponując dla poszczególnych decyzji macierzami prawdopodobieństw przejścia P^0, P^1 , oraz kosztów R^0, R^1 można obliczyć na podstawie wzoru (1.17) koszty oczekiwane w jednym kroku q^0, q^1 . Zgodnie ze schematem 1.1 decyzję do pierwszej iteracji można wybrać dowolnie, na przykład $k=0$. Następnie rozwiązuje się układ równań (1.36). Rozwiązania v_i są oczekiwanymi kosztami, jakie ponieśliby ubezpieczeni znajdujący się w poszczególnych klasach przy nieskończonym horyzoncie czasowym. Następnie dla każdej decyzji obliczana jest wartość wyrażenia (1.38) Do kolejnej iteracji przechodzi decyzja minimalizująca wartość tego wyrażenia. Jeżeli w dwóch kolejnych iteracjach najlepszy okazuje się ten sam wektor decyzji, to zawiera on decyzje optymalne dla każdego stanu. Rozwiązania w kolejnych iteracjach dla prezentowanego już przykładu są przedstawione w tabeli 3.10

Tabela 3.10. Wybór optymalnych decyzji za pomocą modelu długookresowego dla przykładowych paupów łaknienia niżki. Kolejne iteracje

Stany i	Kolejne iteracje							
	1		2		3		4	
	k_i	v_i^k	k_i	v_i^k	k_i	v_i^k	k_i^*	v_i^*
1	0	16,9846	1	15,7708	1	15,7708	1	15,7708
2	0	16,3419	1	15,0576	1	15,0576	1	15,0576
3	0	15,6831	1	14,3757	1	14,3757	1	14,3757
4	0	15,1185	1	13,7968	1	13,7968	1	13,7968
5	0	14,419	1	13,2055	1	13,2055	1	13,2055
6	0	13,7454	1	12,6255	1	12,6255	1	12,6255
7	0	13,1366	1	12,1284	1	12,1284	1	12,1284
8	0	12,6146	1	11,7239	1	11,7239	1	11,7239
9	0	12,2107	1	11,4209	1	11,4209	1	11,4209
10	0	11,8911	1	11,1859	1	11,1859	1	11,1859
11	0	11,7593	1	11,1059	0	10,9849	0	10,9849

Źródło: Obliczenia własne

Rozdział 4

Wyniki modelowania

Rozdział ten poświęcony jest zaprezentowaniu wyników modelowania łąknienia zniżek oraz bezpośrednio z nimi związanych wniosków. Obliczenia dokonane zostały za pomocą programu¹⁸ przygotowanego w środowisku Matlab wykorzystującego rekurencyjną i iteracyjną metodę Howarda.

4.1 Wprowadzenie

Przedstawione w poprzednim rozdziale metody modelowania pozwalają na obliczenie najbardziej opłacalnych dla ubezpieczonego pułapów łąknienia zniżek oraz kosztów, jakie poniesie w zależności od klasy, w której znajduje się na początku oraz horyzontu czasowego, jaki bierze pod uwagę. Niniejsza praca ma na celu ocenę możliwości obydwu modeli: długookresowego i krótkookresowego, zbadanie wpływu założeń dotyczących rozkładów i parametrów oraz próbę oszacowania zjawiska łąknienia zniżki w Polsce. Tak postawione cele powodują, że wyniki modelowania można podzielić na :

- wyniki dla modelu długookresowego,
- wyniki dla modelu krótkookresowego,
- wyniki dotyczące porównania modeli,
- analizę wrażliwości wyników na zmiany założeń,
- wyniki modelu dla polskich danych.

Do pokazania możliwości modelu długo i krótkookresowego oraz ich porównania (trzy pierwsze punkty) przyjęte zostały szczegółowe założenia mające na celu uwypuklenie zjawiska łąknienia zniżek w możliwie realistycznych warunkach:

- rozkład liczby szkód jest rozkładem Poissona o parametrze $\lambda = 0,3$,
- rozkład wysokości szkód jest rozkładem gamma o parametrach $a=2$, $b=1$, zatem jest to rozkład o $EX=2$ i $DX=\sqrt{2} \approx 1,414$ (wartości w tys. zł),
- realna stopa procentowa wynosi 5 %,
- składka brutto wynosi 960 zł,

¹⁸ Tekst podstawowej wersji użytego programu podany jest w załączniku nr 2

- interwał wynosi $INT=0,01$ (tys. zł), co pozwala na oszacowanie optymalnego poziomu łąknienia zniżki z dokładnością zaokrąglenia ± 5 zł. Maksymalny i minimalny badany pułap łąknienia zniżki wybierane są tak, aby można było wyznaczyć pułapy optymalne. W tym przypadku, wystarczyło zbadać pułapy w przedziale $\langle 0,3 \rangle$.

W pierwszej kolejności przedstawione są wyniki modelowania dla modelu długookresowego, gdyż model ten pozwala na wyznaczenie granicznych wartości, a co za tym idzie daje możliwość ogólnego wnioskowania, bez potrzeby określania horyzontu czasowego. Wyniki otrzymane przy zastosowaniu modelu długookresowego mogą dotyczyć nie tylko wartości pułapów łąknienia zniżki oraz charakterystyki ryzyka w danym systemie. Na ich podstawie można zbudować syntetyczne miary dla systemu, co pozwala na porównywanie systemów.

Miarą pozwalającą ocenić natężenie zjawiska łąknienia zniżek w całym systemie za pomocą jednej liczby jest AOR (*average optimal retention*) – czyli średni poziom łąknienia zniżek w systemie (por. Lemaire [1995], s.99). Wskaźnik AOR może być wyznaczony dla każdego systemu na podstawie wzoru

$$AOR = \sum_{i=1}^s x_i^* \cdot e_i^* \quad \text{dla } i \in S, \quad (4.1)$$

gdzie e_i^* jest stacjonarnym prawdopodobieństwem trafienia do określonej klasy w przypadku zastosowania optymalnych decyzji. AOR jest de facto średnią ważoną optymalnych pułapów łąknienia zniżki dla wszystkich klas, w której wagami są stacjonarne prawdopodobieństwa trafienia do poszczególnych klas.

W analogiczny sposób obliczyć można uśrednione miary dla całego systemu: efektywną szkodowość na podstawie wzoru

$$\lambda^* = \sum_{i=1}^s \lambda_i^* \cdot e_i^*, \quad (4.2)$$

uśrednioną wartość oczekiwaną niezgłaszanej szkody na podstawie wzoru

$$y^* = \sum_{i=1}^s y_i^* \cdot e_i^*, \quad (4.3)$$

uśrednioną wartość oczekiwaną zgłaszanej szkody na podstawie wzoru

$$m^* = \sum_{i=1}^s m_i^* \cdot e_i^*. \quad (4.4)$$

Ponadto w analizie zostaną zastosowane następujące miary:

względna wartość pułapu łąknienia zniżki odniesiona do składki w tej samej klasie

$$x_i^* / b_i, \quad (4.5)$$

oczekiwana składka stacjonarna, jeśli wszystkie szkody są zgłaszane

$$b_e^0 = \sum_{i=1}^s b_i \cdot e_i^0, \quad (4.6)$$

oczekiwana składka stacjonarna, jeśli ubezpieczeni stosują optymalne poziomy łaknienia zniżki

$$b_e^* = \sum_{i=1}^s b_i \cdot e_i^*, \quad (4.7)$$

oraz oczekiwana wartość odszkodowań wypłacanych przez zakładu ubezpieczeń przypadająca na jednego ubezpieczonego przy założeniu występowania łaknienia zniżki

$$P_{netto}^* = \sum_{j=1}^s \lambda_j^* \cdot m_j^* \cdot e_j^*. \quad (4.8)$$

Wyniki modelu krótkookresowego omawiane są krócej, ponieważ główny nacisk położony został na prezentację optymalnych pułapów łaknienia zniżki oraz kosztów w zależności od horyzontu czasowego branego pod uwagę. Analiza charakterystyk ryzyka oraz wyznaczania syntetycznych miar charakteryzujących cały system przebiega analogicznie jak w modelu długookresowym, ale wymaga przyjęcia dodatkowych założeń dotyczących horyzontu czasowego oraz rozkładu początkowego. Z tych powodów nie została ona przedstawiona w tej pracy. Wyjątkiem jest miara umożliwiająca badanie średniego natężenia zjawiska łaknienia zniżek w krótkim okresie AOR(n). Wskaźnik ten może być obliczony dla dowolnego okresu według wzoru

$$AOR(n) = \sum_{i=1}^s x_i^*(n) \cdot d_{ni}^*, \quad (4.9)$$

gdzie d_{ni}^* oznacza prawdopodobieństwo trafienia do stanu i w n -tym okresie przy zastosowaniu optymalnej strategii.

Modele długookresowy i krótkookresowy porównywane są pod względem różnic wyników stosowania optymalnych strategii wyznaczonych przy ich pomocy. Badane są różnice w zależności od horyzontu czasowego oraz przykładowych wartości początkowego rozkładu prawdopodobieństwa. Różnice w zależności od horyzontu czasowego zostaną przedstawione za pomocą porównania stosowania przez ubezpieczonego strategii zgłaszania wszystkich szkód, optymalnej strategii modelu długookresowego oraz optymalnych strategii wyznaczonych na podstawie modelu krótkookresowego.

Zbieżność rozwiązań modelu krótkookresowego w zależności od rozkładu początkowego oraz horyzontu czasowego jest badana za pomocą porównania syntetycznych

wskaźników AOR i AOR(n) dla dwóch przykładowych wariantów początkowych rozkładów, które zostaną przedstawione szczegółowo w części z wynikami.

Ważnym problemem jest badanie wpływu założeń dotyczących rozkładów oraz ich parametrów na otrzymywane wyniki. Założenia dotyczące wartości parametrów są identyczne jak w przypadku porównania modeli krótko i długookresowego, jednak część z nich zostaje uchylona przy badaniu kolejnych parametrów, aby móc zbadać wpływ zmian kolejnych parametrów przy pozostałych warunkach niezmiennych. Za pomocą modelu długookresowego badany jest wpływ na wyniki następujących założeń dotyczących:

- typu rozkładu (na przykładzie rozkładów Poissona, ujemnego dwumianowego, gamma oraz log-normalnego),
- zmian stopy procentowej,
- zmian szkodowości,
- zmian wartości oczekiwanej i wariancji szkód.

Dla porządku zakres zmian każdego z badanych parametrów jest podany wraz z wynikami pokazującymi skutki jakie powoduje.

W modelowaniu zjawiska łaknienia zniżek w Polsce celem rozważań jest próba oszacowania niezniekształconych przez zjawisko łaknienia zniżek (rzeczywistych) wartości parametrów rozkładów wysokości oraz liczby szkód. Oszacowania te pozwoliłyby na ocenę nasilenia i skutków tego zjawiska w Polsce. W niektórych publikacjach¹⁹ znaleźć można teoretyczne rozwiązania postawionego problemu w oparciu o metodę iteracyjną Howarda. Rozwiązanie takie polega na swego rodzaju odwróceniu tej metody optymalizacji tak, aby z obserwowanego rozkładu liczby szkód uwzględniającego łaknienie zniżek otrzymać rozkład niezniekształcony przez to zjawisko. Ze względu na fakt, iż metodę tę trudno byłoby zastosować bez znacznego skomplikowania rozważań, w tej pracy do znalezienia odpowiednich parametrów posłużą obliczenia oparte na opisanym już modelu długookresowym.

Obliczenia te polegają na znalezieniu, dla założonych rzeczywistych rozkładów, parametrów jakie powinny być obserwowane przez zakłady ubezpieczeń po zniekształceniu ich przez zjawisko łaknienia zniżek. Przyjmuje się, że parametry te równają się wartościom m^* i λ^* , obliczonym według wzorów (4.4) i (4.2). Spośród tych zniekształconych parametrów wybierane są następnie te, które bliskie są parametrom znanym z danych empirycznych. Jeśli zniekształcone parametry uzyskane z obliczeń pokrywają się z empirycznie obserwowanymi, to pozwala to na stwierdzenie, że założone w tym przypadku rozkłady rzeczywiste mogą być tymi, które są charakterystyczne dla Polski. W przypadku

¹⁹ Na przykład w artykule Walhin'a i Paris'a [2000]

tych obliczeń założenia dotyczą więc nie rozkładów i parametrów przyjmowanych przed modelowaniem, ale wielkości, które otrzymane zostaną po zastosowaniu modelu. Przyjmuje się zatem, że wartość oczekiwana obserwowanej szkody wynosi 4238 zł, natomiast obserwowana częstość szkód 4,23%. Wartości te zostały przyjęte na podstawie dostępnych danych o charakterystyce ubezpieczeń OC w Polsce, które są zaprezentowane w tabeli 4.1

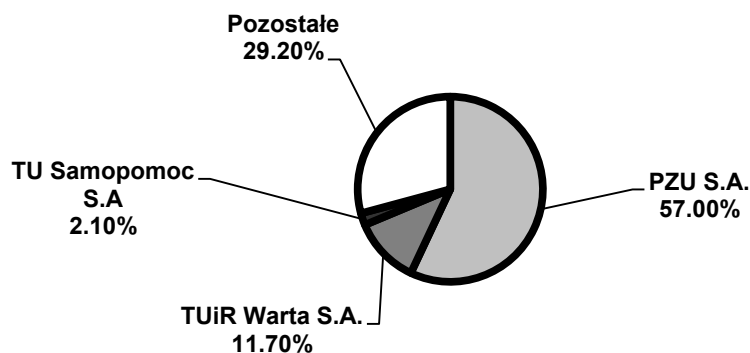
Tabela 4.1. Dane empiryczne podstawowych charakterystyk ubezpieczeń komunikacyjnych w Polsce

Charakterystyki ubezpieczeń OC posiadaczy pojazdów mechanicznych		
	1998	1999
Podstawowe wskaźniki		
Średnia składka (w zł)	261,03 zł	287,17 zł
Składka czysta (w zł)	148,63 zł	179,45 zł
Częstość szkód (w %)	3,67%	4,23%
Średnia szkoda (w zł)	4 048,20 zł	4 238,76 zł

Źródło: Biuletyn PUNU za rok 2001

Systemem bonus- malus wykorzystanym w symulacji jest SBM PZU S.A Jest on reprezentantem wszystkich systemów bonus-malus stosowanych w Polsce. Założenie takie jest uzasadnione dominującym udziałem w rynku firmy PZU (ponad 57%) oraz faktem, iż druga co do udziału w rynku firma Warta ma SBM jedynie nieznacznie²⁰ różniący się od SBM firmy PZU . Stopa procentowa jest przyjęta na poziomie 5%.

Wykres 4.1. Udział wybranych firm w rynku ubezpieczeń komunikacyjnych w Polsce w 2000 roku



Źródło: Biuletyn PUNU za rok 2000

²⁰ Tabele obu systemów są podane w załączniku nr 1. Wyniki porównania obu systemów pod względem pałapów łaknienia zniżki prezentowane są w podrozdziale 4.1.4.

4.2 Wyniki modelu długookresowego

4.2.1 Proces rozwiązywania

Zastosowanie długookresowego modelu Howarda wiąże się z wyznaczeniem optymalnego pułapu łaknienia zniżek drogą kolejnych iteracji, które prowadzą do kolejnych coraz lepszych rozwiązań. W modelu o parametrach określonych w rozdziale 4.1 w kolejnych iteracjach otrzymano rozwiązania zaprezentowane w tabeli 4.2.

Tabela 4.2. Model długookresowy. Wyniki kolejnych iteracji

Stany (i)	Decyzje i koszty całkowite w kolejnych iteracjach							
	Iteracja nr 1		Iteracja nr 2		Iteracja nr 3		Iteracja nr 4	
	x_i^k	v_i^k	x_i^k	v_i^k	x_i^k	v_i^k	x_i^*	v_i^*
1	0	17,06	0,65	15,73	0,71	15,71	0,71	15,71
2	0	16,42	1,43	15,03	1,52	14,99	1,52	14,99
3	0	15,77	1,37	14,36	1,4	14,32	1,4	14,32
4	0	15,22	2,08	13,79	2,02	13,76	2,02	13,75
5	0	14,53	1,85	13,20	1,7	13,16	1,7	13,16
6	0	13,87	1,85	12,63	1,59	12,59	1,6	12,59
7	0	13,29	1,78	12,14	1,52	12,10	1,52	12,10
8	0	12,79	1,62	11,75	1,35	11,70	1,35	11,70
9	0	12,41	1,27	11,46	1,04	11,43	1,04	11,42
10	0	12,13	1,08	11,23	0,89	11,20	0,89	11,20
11	0	12,01	0,71	11,15	0,59	11,12	0,58	11,11

Zródło: Własne obliczenia

Pierwszą decyzją, wybraną arbitralnie, był zerowy poziom łaknienia zniżek dla każdej z klas, co jest pokazane w kolumnie x_i^k dla iteracji 1. Koszty v_i (podane w tys. zł) dla iteracji nr 1 są zdyskontowanymi kosztami, które ubezpieczony poniesie w związku ze składkami zgłaszając wszystkie szkody. Dla iteracji nr 2 koszty te wyraźnie się obniżają, dzieje się tak dla pułapów niezgłaszania szkód podanych w kolumnie x_i^k dla iteracji nr 2. Iteracja nr 3 pozwala jeszcze bardziej obniżyć koszty dla każdej klasy, w której znalazłby się ubezpieczony. Pułapy łaknienia zniżki w tym przypadku są już optymalne, bowiem następna iteracja nie zmienia rozwiązania. Zgodnie z zasadą podaną w rozdziale 1 powtórzenie się tego samego rozwiązania kończy proces optymalizacji.

4.2.2 Prezentacja rozwiązania

Modelowanie za pomocą metody iteracyjnej umożliwia wyznaczenie optymalnych pułapów łaknienia zniżki, kosztów z nimi związanych oraz innych wielkości, które pozwalają ocenić różne aspekty zjawiska łaknienia zniżki. Wielkości te przedstawia tabela 4.3.

Tabela 4.3. Wyniki modelu długookresowego SBM firmy PZU

Klasa i	x_i^* (w tys. zł)	v_i^0 (w tys. zł)	v_i^* (w tys. zł)	p_i^*	λ_i^*	y_i^* (w tys. zł)	m_i^* (w tys. zł)	e_i^0	e_i^*
1	0,710	17,066	15,707	0,160	0,250	0,440	2,290	0,023	0,001
2	1,520	16,429	14,995	0,450	0,170	0,870	2,920	0,047	0,004
3	1,400	15,778	14,326	0,410	0,180	0,820	2,820	0,059	0,009
4	2,020	15,223	13,758	0,600	0,120	1,100	3,350	0,066	0,016
5	1,700	14,537	13,167	0,510	0,150	0,960	3,070	0,076	0,030
6	1,600	13,880	12,591	0,480	0,160	0,910	2,980	0,085	0,052
7	1,520	13,291	12,100	0,450	0,170	0,870	2,920	0,090	0,073
8	1,350	12,793	11,707	0,390	0,180	0,790	2,780	0,086	0,085
9	1,040	12,418	11,427	0,280	0,220	0,630	2,530	0,120	0,161
10	0,890	12,133	11,201	0,220	0,230	0,550	2,420	0,089	0,129
11	0,580	12,009	11,116	0,120	0,270	0,370	2,210	0,254	0,439

Zródło: Własne obliczenia

Wartości optymalnych pułapów łaknienia zniżki x_i^* w kolejnych klasach i , wyznaczonych za pomocą modelu długookresowego, są podane w kolumnie 2 tabeli 4.3. Interpretować je można jako pułapy łaknienia zniżki, które powinni wybrać ubezpieczeni, którzy znajdują się w określonej klasie i i nie mają w planach opuszczania systemu. Ścisłej rzecz ujmując, pozostaną w systemie przy bardzo odległym horyzoncie czasowym. Wartości te są jednocześnie granicznymi wartościami pułapu łaknienia zniżki w tym sensie, że optymalne poziomy łaknienia zniżki przy bliższych horyzontach czasowych będą zawsze mniejsze.

Zatem można stwierdzić, że kierowcy, który jest w klasie 11, w każdym wypadku będzie opłacało się zgłosić szkodę o wartości powyżej około 585 zł (ze względu na dokładność obliczonego pułapu łaknienia zniżki 580 +/- 5 zł rzeczywista wartość pułapu mieści się w przedziale (575 zł; 585 zł > ²¹).

Z punktu widzenia ubezpieczonego, który znajduje się w klasie 3 (początkowej) opłacalne jest niezgłaszanie szkód do wysokości 1400 zł. Jeśli jednak w następnym roku trafi on do klasy 4, to nie będzie mu się opłacało zgłaszać szkód do wartości 2020 zł. Porównując

²¹ Podobne uwagi dotyczą kolejnych rozważań traktujących o wartościach pułapów łaknienia zniżki i wielkościach obliczonych na ich podstawie, ale dla płynności przedstawionych wniosków zostaną pominięte.

wartości łaknienia zniżki w różnych klasach, można zauważyć, że największy pułap łaknienia zniżki występuje w klasie 4, natomiast w klasach 2, 4, 5, 6 i 7 przekraczają 1500 zł. Różnice pomiędzy pułapami wynikają głównie z budowy SBM. Niższe pułapy łaknienia zniżki w klasach wyższych są efektem mniejszych kosztów ewentualnych utrat zniżek, natomiast niski poziom łaknienia zniżki w klasie najgorszej wynika z tego, iż niezależnie od liczby zgłoszonych szkód składka nie wzrośnie, bo już jest maksymalna. Ubezpieczonemu w takiej klasie bardziej opłaci się po prostu czekać na rok bez szkód powyżej 710 zł, który pozwoli mu awansować do klasy wyższej.

Relatywnie niski w porównaniu z sąsiednimi klasami poziom łaknienia zniżki w klasie 3 wynoszący 1400 zł można wytłumaczyć określonymi regułami przejścia i różnicą stawek pomiędzy klasami²². Charakterystyczną cechą jest też tendencja do zwiększania się pułapów łaknienia zniżek w kolejnych klasach o coraz wyższych stawkach, od 11 aż do klasy 4. Przyczyną tego jest opłacalność awansowania w długim okresie do wyższej klasy, w której płaci się niższe stawki, i w której ewentualne zgłoszenie szkody nie wiąże się z gwałtownym wzrostem składki w roku przyszłym. Zależność pomiędzy wysokością pułapów łaknienia zniżek i wysokością składek w poszczególnych klasach jest dobrze widoczna, jeśli wielkości te zostaną porównane. Kolumna 3 tabeli 4.4 przedstawia odpowiedź na pytanie jaką częścią (w %) składki w każdej klasie jest odpowiadający jej pułap łaknienia zniżki. x_i^* . Dla porównania wysokość składki b_i została przedstawiona w kolumnie 2.

Tabela 4.4. Względne pułapy łaknienia zniżki

Klasa	b_i (w tys.zł)	x_i^* / b_i (w %)
1	1,440	47,92%
2	1,200	126,67%
3	0,960	146,88%
4	0,864	237,27%
5	0,768	223,96%
6	0,768	209,64%
7	0,672	229,17%
8	0,576	237,85%
9	0,480	220,83%
10	0,480	189,58%
11	0,384	158,85%

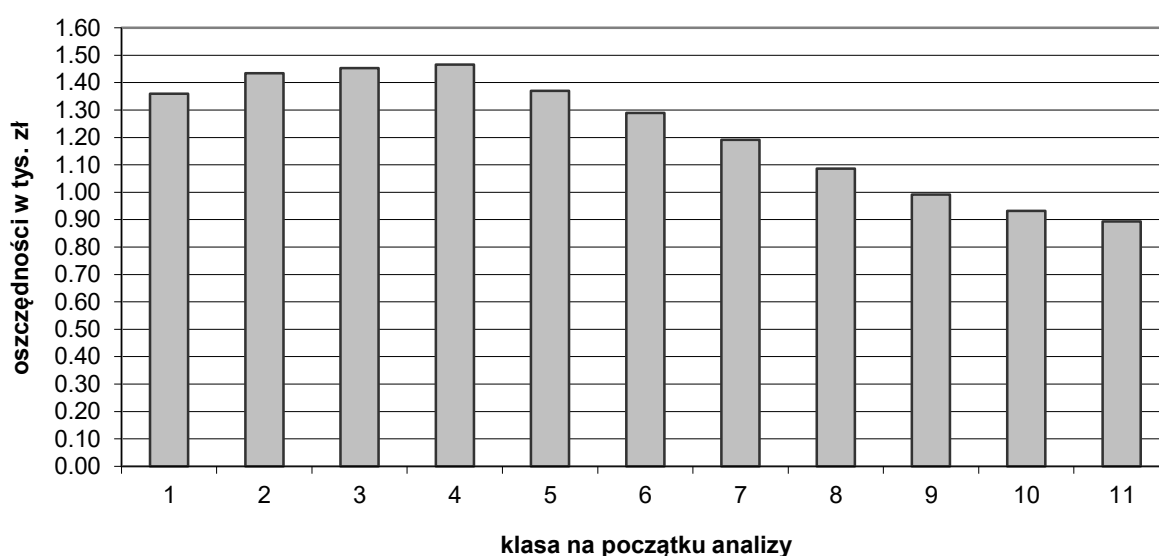
Źródło: Własne obliczenia

²² Problem ten będzie jeszcze szczegółowo rozważany w podrozdziale 4.3

Względne poziomy łaknienia zniżki przedstawione w tabeli 4.4 pozwalają na analizę wysokości łaknienia zniżki z punktu widzenia ubezpieczonego, który porównuje poziom łaknienia zniżki do składki, jaką zapłacił w bieżącym okresie. W klasach od 4 do 9 poziom łaknienia zniżki stanowi dwukrotność składki, w klasach 2,3,9 i 11 przekracza wielkość składki, natomiast w klasie 1 o maksymalnej składce pułap łaknienia zniżki stanowi zaledwie jej niecałą połowę.

Kolumny 3 i 4 tabeli 4.3 przedstawiają sumy oczekiwanych kosztów zdyskontowanych na moment zapłacenia pierwszej składki: sumę kosztów ubezpieczonego zaczynającego w klasie i , który zgłaszałby wszystkie szkody v_i^0 oraz sumę kosztów ubezpieczonego zaczynającego w klasie i , który stosowałby optymalny poziom łaknienia zniżki v_i^* . Wielkości te można interpretować następująco. Gdyby ubezpieczony będący w klasie 3 chciał wiedzieć, jaką sumę powinien odłożyć w banku oferującym odsetki²³ w wysokości 5% rocznie, aby móc pokryć dożywotnio oczekiwane koszty związane z ryzykiem wypadków samochodowych, to w przypadku, gdyby opłacał jedynie składki, suma ta wyniosłaby około 15778 zł. Natomiast, gdyby zdecydował się na optymalną strategię łaknienia zniżki, suma ta wyniosłaby około 14326 zł. Różnica pomiędzy tymi wartościami wynosi 1453 zł i jest miarą korzyści, jakie osiągnąłby ubezpieczony, gdyby stosował pułapy łaknienia zniżki w poszczególnych klasach przedstawione w kolumnie 2 tabeli 4.3. Oczekiwane oszczędności (zyski) we wszystkich klasach są porównane na wykresie 4.2.

Wykres 4.2. Oszczędności ubezpieczonego stosującego optymalną strategię łaknienia zniżek w długim okresie



Źródło: Opracowanie własne

²³ Przy założeniu braku inflacji, stałych parametrach i warunkach umowy.

Coraz mniejsze wartości zysków dla kolejnych klas począwszy od klasy 4 wskazują, że korzyści finansowe ze stosowania łąknienia zniżki są tym większe, im niższa jest klasa, w której znajduje się ubezpieczony, bowiem niezgłaszanie części szkód pozwala mu z większym prawdopodobieństwem przemieścić się do klas o niższej składce. W przypadku ubezpieczonych z klas bez zniżki, opisywana zależność jest osłabiana przez zmniejszającą się wartość pieniądza w czasie, jaki jest potrzebny na awans do lepszych klas. Różnica pomiędzy nakładami poniesionymi na pokrycie kosztów niezgłoszonych szkód, a zdyskontowanymi korzyściami spowodowanymi szybszym trafieniem do lepszych klas jest mniejsza niż w klasie 4, ze względu na większe oddalenie w czasie korzyści. Klasę 4 można zatem uznać w SBM firmy PZU za rozgraniczającą wpływ obu przedstawionych tendencji.

Prawdopodobieństwa p_i^* prezentowane w kolumnie 5 tabeli 4.3 dotyczą zdarzenia, że ubezpieczony z klasy i stosujący optymalny dla swojej klasy pułap łąknienia zniżki nie zgłosi szkody pomimo, że ona zaszła. Prawdopodobieństwo p_i^* jest zarazem częścią szkód, która nie zostanie zgłoszona i rośnie wraz ze wzrostem pułapu łąknienia zniżek. Na uwagę zasługuje fakt, że w klasie o najwyższym nasileniu zjawiska łąknienia zniżki czyli 4, aż 60% szkód nie zostanie zgłoszona. W istotny sposób wpływa to na obserwowany przez zakłady ubezpieczeń rozkład liczby oraz wartości szkód, a co za tym idzie na efektywną obserwowaną szkodowość i średnią wysokość szkody.

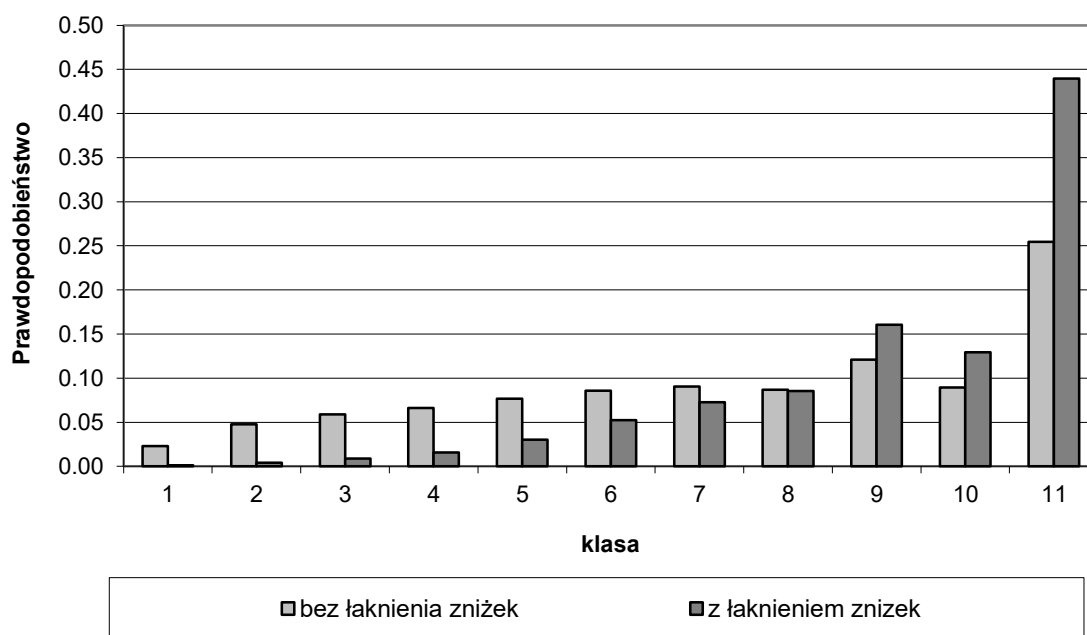
Gdyby łąknienie zniżki nie występowało, średnia liczba zgłoszonych rocznie szkód przypadających na jedną polisę wynosiłaby 0,3 we wszystkich klasach. Wartość tę można porównać z wartościami oczekiwanymi liczby zgłoszonych szkód w poszczególnych klasach po uwzględnieniu zjawiska łąknienia zniżki, czyli λ_i^* . Wartości λ_i^* są przedstawione w kolumnie 6 tabeli 4.3 i są znacznie niższe od 0,3, osiągając dla klasy 4 poziom 0,12. Występowanie różnych poziomów łąknienia zniżki w różnych klasach SBM może sugerować użycie złożonego rozkładu Poissona do modelowania liczby szkód obserwowanych.

W przypadku średnich wysokości szkód zgłaszanych m_i^* prezentowanych w kolumnie 8 tabeli 4.3 zakład ubezpieczeń PZU obserwowałby w poszczególnych klasach wartości wyższe od 2000 zł (czyli wartości oczekiwanej rzeczywistego rozkładu szkód), ponieważ szkody zgłaszane są tylko od pewnego poziomu ich wartości, czyli optymalnego pułapu łąknienia zniżki w każdej z klas. Wartość przeciętnej zgłoszonej szkody jest bezpośrednio związana z poziomem łąknienia zniżki i dla klas 4 i 5 o najwyższych poziomach łąknienia zniżki wynosi ponad 3000 zł.

Im większy pułap niezgłaszanych szkód, tym wyższa jest także oczekiwana wartość szkody, którą ubezpieczony będzie musiał opłacić sam, czyli y_i^* . W przypadku klasy o najmniejszym nasileniu zjawiska łaknienia zniżki będzie to wartość 370 zł, natomiast w klasie 4 ubezpieczony musi być przygotowany na pokrycie szkód o średniej wartości 1100 zł.

Istotnym skutkiem, jaki wywołuje zjawisko łaknienia zniżki jest zwiększenie prawdopodobieństwa, iż ubezpieczony znajdzie się w klasach zniżkowych. Efekt ten w przypadku przyjętych parametrów można zaobserwować porównując stacjonarne rozkłady prawdopodobieństwa trafienia do poszczególnych klas w przypadku występowania zjawiska łaknienia zniżki e_i^* oraz gdyby ubezpieczeni zgłaszali wszystkie szkody e_i^0 . Porównanie takie przedstawione jest na wykresie 4.3.

Wykres 4.3. Porównanie prawdopodobieństw stacjonarnych z/bez łaknienia zniżek w firmie PZU



Źródło: Opracowanie własne.

Wykres 4.3 pokazuje, że stosując optymalne pułapy łaknienia zniżki (kolor ciemniejszy) ubezpieczony może oczekiwać, że po odpowiednio długim okresie obecności w systemie prawdopodobieństwo, że trafi do klasy najlepszej wynosi prawie 45%, podczas gdy zgłaszając wszystkie szkody (kolor jaśniejszy) może się tam znaleźć z prawdopodobieństwem około 25%. Niezgłaszanie szkód nie wyższych niż optymalny pułap łaknienia zniżki zwiększa też prawdopodobieństwo trafienia do klasy 9 lub 10, natomiast zdecydowanie zmniejsza prawdopodobieństwo trafienia do klas niższych, karanych wyższymi składkami. Z punktu

widzenia zakładu ubezpieczeń rozkłady te pokazują, że zjawisko łaknienia zniżki zdecydowanie zwiększa „ciążenie” ubezpieczonych w kierunku klas z większymi zniżkami, co jest przyczyną nierównowagi SBM.

Dysponując stacjonarnym rozkładem prawdopodobieństwa trafienia ubezpieczonego do określonej klasy można otrzymać wyniki nie tylko dla poszczególnych klas, jak w tabeli 4.3, ale uśrednione dla całego systemu (patrz. wzory w 4.1), przy czym wagami obliczanej w ten sposób średniej ważonej są właśnie prawdopodobieństwa e_i^* . Wyniki te przedstawia tabela 4.5.

Tabela 4.5. Uśrednione wyniki modelu długookresowego SBM firmy PZU

Wskaźnik	Wartość
x^* (w tys.zł) - AOR	0,949
p^*	0,245
λ^*	0,226
y^* (w tys. zł)	0,569
m^* (w tys. zł)	2,482

Zródło: Opracowania własne

Wskaźniki te można interpretować jako parametry, które wystąpiłyby w całej zbiorowości ubezpieczonych, gdyby system obowiązywał tak długo, że rozkład prawdopodobieństw trafienia do poszczególnych klas byłby bliski stacjonarnemu. Przeciętnie ubezpieczeni nie zgłaszałiby wtedy szkód do wysokości około 950 zł, co stanowiłoby prawie 25% wszystkich szkód. Zjawisko to doprowadziłoby do obserwowania przez zakład ubezpieczeń przeciętnej liczby szkód przypadających na ubezpieczonego na poziomie 0,226 w porównaniu z rzeczywistością na poziomie 0,3. Przeciętnie ubezpieczony mógłby oczekiwać, że będzie musiał pokryć z własnej kieszeni szkodę o wartości 570 zł. Natomiast zakład ubezpieczeń obserwowałby rozkład szkód, w którym przeciętna wartość szkody wynosiłaby 2482 zł, a nie 2000 zł jak w rzeczywistości.

Korzystając z wyników z tabeli 4.3 można ocenić wpływ łaknienia zniżki na bilans ubezpieczyciela w długim okresie. W tabeli 4.6 przedstawione zostało zestawienie wpływów (w postaci składek) i wydatków (w postaci odszkodowań) związanych z ubezpieczonym o przeciętnym poziomie ryzyka.

Tabela 4.6. Porównanie wpływów i wydatków zakładu ubezpieczeń związanych z przeciętnym ubezpieczonym

	Roczne wpływy ze składek (w tys. zł)		Przeciętna roczna wartość odszkodowań (w tys. zł)		Różnica (w tys. zł)
Planowane (bez uwzględnienia łaknienia zniżki)	b_e^0	0,638	P_{netto}	0,600	0,038
Rzeczywiste (z uwzględnieniem łaknienia zniżki)	b_e^*	0,498	P_{netto}^*	0,549	-0,051
Różnice	$b_e^* - b_e^0$	-0,140	$P_{netto}^* - P_{netto}$	-0,051	

Źródło: Obliczenia własne.

W sytuacji, gdy zjawisko łaknienia zniżki nie występowałoby, w długim okresie czasu przeciętna składka ubezpieczonego równałaby się składce stacjonarnej b_e^0 , natomiast wartość oczekiwana odszkodowania byłaby po prostu składką netto P_{netto} wyznaczoną według wzoru (2.16). Planując w ten sposób, zakład ubezpieczeń otrzymałby dodatnią różnicę pomiędzy wartościami wpływów i wydatków w przeliczeniu na przeciętnego ubezpieczonego. Różnica ta stanowiąca tylko 6,3% składki netto nie wystarczyłaby jednak, do pokrycia kosztów związanych z działalnością zakładu, ponieważ z danych empirycznych wynika, że narzut na składkę netto wynosi około 60% (por. podrozdział 3.1 i tabela 4.1).

Gdyby uwzględnione zostało zjawisko łaknienia zniżki, w długim okresie czasu przeciętna składka ubezpieczonego równałaby się składce stacjonarnej obliczonej według wzoru (4.7) czyli b_e^* , natomiast wartość oczekiwana odszkodowania byłby zmodyfikowaną składką netto P_{netto}^* wyznaczoną według wzoru (4.8). W tym wypadku nawet różnica pomiędzy przychodami ze składek i przeciętną wartością odszkodowań przypadających na ubezpieczonego w długim okresie jest ujemna, co świadczy o tym, że zjawisko łaknienia zniżki działa na niekorzyść ubezpieczyciela. Chociaż zmniejsza ono oczekiwaną wartość odszkodowań, to w znacznie większym stopniu przyczynia się do zmniejszenia przychodów ze składek, zwiększając prawdopodobieństwa trafienia przez ubezpieczonych do klas z większymi zniżkami.

4.2.3 Porównanie wyników modelu dla wybranych zakładów ubezpieczeń

Zastosowanie modelu do badania poziomów łaknienia zniżek i charakterystyk ryzyka różnych zakładach ubezpieczeń o różnych SBM umożliwia przeprowadzenie różnego rodzaju porównań. Ich wyniki mogą stanowić dla ubezpieczonego wskazówkę przy wyborze firmy ubezpieczeniowej. Dla firm ubezpieczeniowych porównania takie mogą się okazać pomocne

w ocenie sytuacji rynkowej oraz przy ewentualnych modyfikacjach istniejącego systemu. Zastosowanie modelu do porównań pomiędzy firmami jest prezentowane na przykładzie wyników otrzymanych na podstawie analizy SBM trzech firm: PZU, Warty oraz Samopomocy. Tabela wyników firmy PZU została już zaprezentowana. Krótkie przedstawienie wyników Warty i Samopomocy oraz porównanie prezentowanych systemów zawierają kolejne punkty.

Wyniki modelu SBM firmy Warta

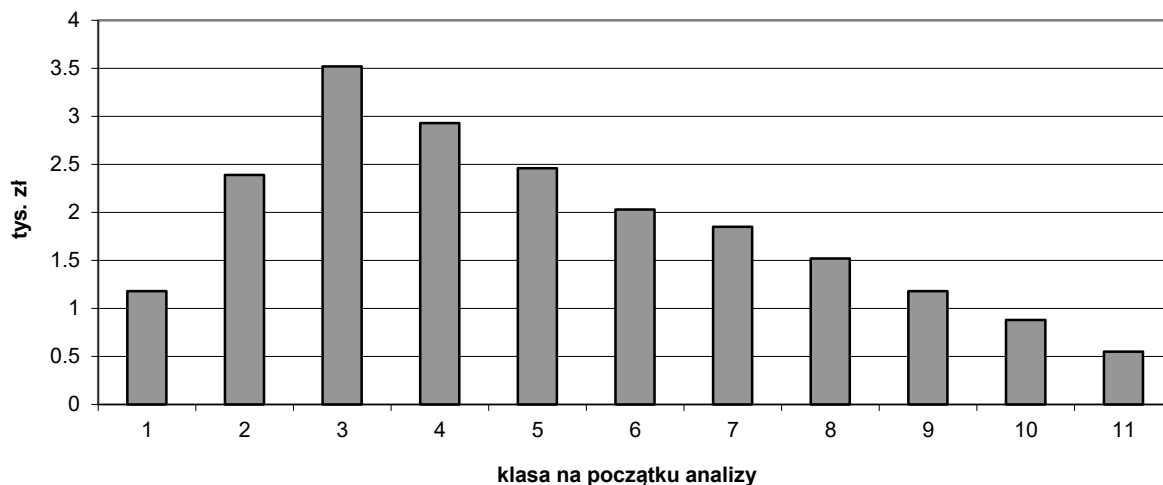
SBM firmy Warta składa się z 11 klas. Klasa 4 jest klasą wejściową. Wyniki modelowania łaknienia zniżki w tym systemie przedstawia tabela 4.7, natomiast wysokość pułapów łaknienia zniżek oraz porównanie stacjonarnych rozkładów prawdopodobieństw znalezienia się w poszczególnych klasach przedstawione są na wykresach 4.4 i 4.5.

Tabela 4.7. Wyniki modelowania łaknienia zniżki w firmie Warta

Klasa <i>l</i>	x_i^* (w tys.zł)	p_i^*	λ_i^*	y_i^* (w tys. zł)	m_i^* (w tys.zł)	e_i^0	e_i^*
1	1,18	0,33	0,20	0,70	2,64	0,0404	0,0003
2	2,39	0,69	0,09	1,24	3,69	0,0465	0,0009
3	3,52	0,87	0,04	1,58	4,74	0,0564	0,0034
4	2,93	0,79	0,06	1,42	4,18	0,0619	0,0080
5	2,46	0,70	0,09	1,27	3,75	0,0712	0,0199
6	2,03	0,60	0,12	1,10	3,36	0,0755	0,0334
7	1,85	0,55	0,13	1,02	3,20	0,0916	0,0705
8	1,52	0,45	0,17	0,87	2,92	0,0878	0,0873
9	1,18	0,33	0,20	0,70	2,64	0,1221	0,1699
10	0,88	0,22	0,23	0,54	2,41	0,0903	0,1390
11	0,55	0,11	0,27	0,35	2,20	0,2564	0,4674

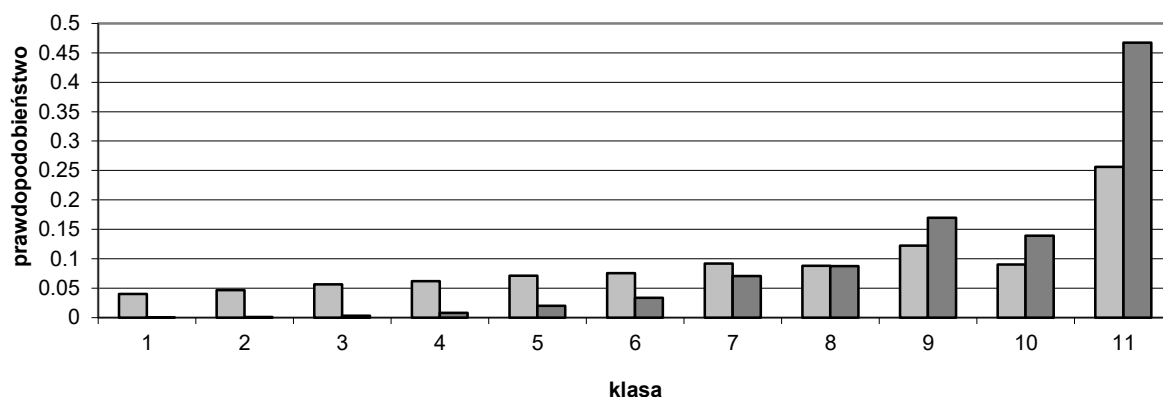
Źródło: Obliczenia własne

Wykres 4.4. Pułapy łaknienia zniżki w zależności od klasy w firmie Warta



Źródło: Opracowanie własne

Wykres 4.5 Porównanie prawdopodobieństw stacjonarnych z/bez łaknienia zniżki w zależności od klasy w firmie Warta



Źródło: Opracowanie własne.

Wykres 4.4 pokazuje, że wysokość pułapów łaknienia zniżki jest rozłożona pomiędzy klasami w ten sposób, że mają one coraz większe wartości kolejno w klasach 1, 2 i 3, gdzie pułap jest maksymalny $x_3^* = 3520$ zł, a następnie zmniejszają się dla kolejnych klas osiągając 550 zł w klasie 11 o największej zniżce. Godny uwagi jest fakt, że przy optymalnym poziomie łaknienia zniżki w klasie 3 aż 87% szkód nie zostanie zgłoszone, a w pięciu z pozostałych klas nie zostanie zgłoszona ponad połowa szkód. Łaknienie zniżki powoduje znaczne zróżnicowanie obserwowanych przez ubezpieczyciela parametrów pomiędzy klasami. Przeciętna obserwowana wysokość szkody waha się od 2200 zł do 4740 zł zależnie od klasy. Analogicznie, duże jest także zróżnicowanie obserwowanej szkodowości w poszczególnych klasach oraz przeciętnej szkody, którą ubezpieczony musi pokryć samodzielnie. Na podstawie wykresu. 4.5 można stwierdzić, że zjawisko łaknienia zniżki w

SBM Warty wpływa na znaczne zmniejszenie się prawdopodobieństwa trafienia do klas niższych, natomiast wyraźnie zwiększa w długim okresie prawdopodobieństwo znalezienia się ubezpieczonego w klasie o największejniżce (z 26% do 47%).

Wyniki modelu SBM firmy Samopomoc

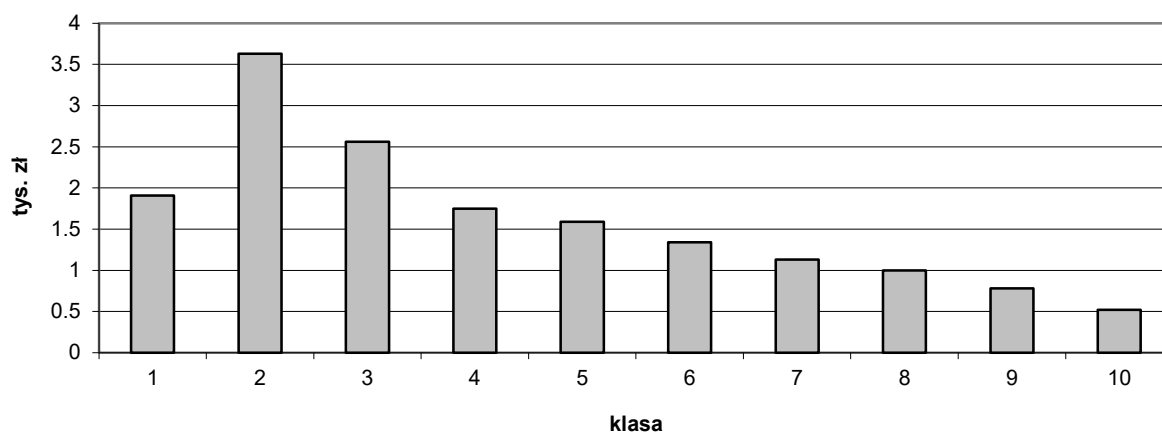
SBM Samopomocy składa się z 10 klas. Klasą wejściową jest klasa 4. Wyniki modelowania łaknienia zniżki w tym systemie przedstawia tabela 4.8, natomiast wysokość pułapów łaknienia zniżek oraz porównanie stacjonarnych rozkładów prawdopodobieństw znalezienia się w poszczególnych klasach przedstawione są na wykresach 4.6 i 4.7.

Tabela 4.8. Wyniki modelowania łaknienia zniżki w firmie Samopomoc

Klasa (i)	x_i^* (w tys.PLN)	p_i^*	λ_i^*	y_i^* (w tys.PLN)	m_i^* (w tys.PLN)	e_i^0	e_i^*
1	1,91	0,57	0,13	1,05	3,25	0,0069	0,0003
2	3,63	0,88	0,04	1,60	4,85	0,0144	0,0030
3	2,56	0,72	0,08	1,30	3,84	0,0189	0,0046
4	1,75	0,52	0,14	0,98	3,11	0,0280	0,0090
5	1,59	0,47	0,16	0,91	2,98	0,0402	0,0184
6	1,34	0,39	0,18	0,79	2,77	0,0609	0,0409
7	1,13	0,31	0,21	0,68	2,60	0,0644	0,0472
8	1,00	0,26	0,22	0,61	2,50	0,0869	0,0742
9	0,78	0,18	0,24	0,48	2,34	0,1762	0,1867
10	0,52	0,10	0,27	0,33	2,18	0,5031	0,6157

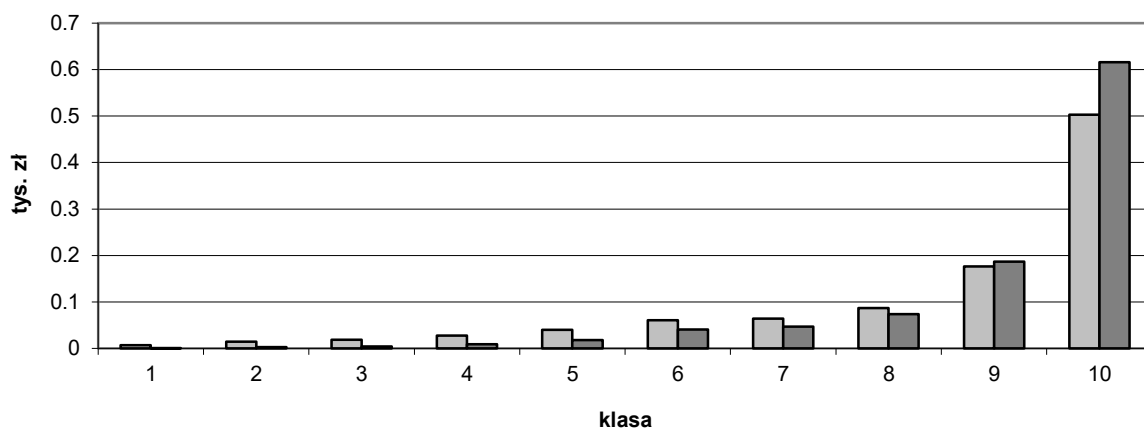
Źródło: Obliczenia własne

Wykres. 4.6. Pułapy łaknienia zniżki w zależności od klasy w firmie Samopomoc



Źródło: Opracowanie własne

Wykres 4.7 Porównanie prawdopodobieństw stacjonarnych z/bez łąknienia zniżek w zależności od klasy w firmie Samopomoc



Źródło: Opracowanie własne

Wykres 4.6 pokazuje, że poziom łąknienia zniżki w klasie 1 przekraczający 1900 zł rośnie do maksymalnego 3630 zł w klasie 2, a następnie, w kolejnych klasach jest coraz niższy. W klasie 10 wynosi on 520 zł. Wyróżniającą się pod względem nasilenia zjawiska jest w przypadku tego systemu klasa 2, w której ubezpieczonemu nie opłaca się zgłaszać aż 88% szkód. Także w klasie następnej wpływ łąknienia zniżki jest wysoki (72% niezgłaszanych szkód), natomiast w pozostałych klasach odsetek niezgłaszanych szkód jest wyraźnie niższy. Opisane zależności znajdują odzwierciedlenie w wartościach, obserwowanych przez ubezpieczyciela, parametrów ryzyka. Wyraźnie odróżnia się pod tym względem, w porównaniu z resztą klas, klasa 2, w której przeciętna obserwowana wartość szkody, przy założeniu istnienia zjawiska łąknienia zniżki, osiągnie 4850 zł, przy szkodowości obserwowanej na poziomie 4%. Analizując na podstawie wykresu 4.7 wpływ łąknienia zniżki na stacjonarne prawdopodobieństwa znalezienia się w określonym stanie można stwierdzić, że zjawisko to łagodnie wzmacnia wyraźną w tym systemie tendencję do kumulowania się ubezpieczonych w lepszych klasach na przykład zwiększa szansę trafienia ubezpieczonego do klasy o największej zniżce z 50% do 61%.

Porównanie wyników w różnych systemach

Szczegółowe wyniki otrzymane za pomocą modelowania dla różnych systemów zaprezentowane powyżej pozwalają na stwierdzenie, że we wszystkich badanych systemach podobny był schemat ułożenia się optymalnych pułapów łaknienia niżki w różnych klasach. Jest on efektem oddziaływania przeciwstawnych tendencji: zwiększania się opłacalności łaknienia niżki wraz ze wzrostem stawki w danej klasie oraz niekorzystnego oddziaływania dyskonta na różnicę pomiędzy kosztami związanymi z koniecznością pokrywania dodatkowych szkód a spodziewanymi, przyszłymi korzyściami z mniejszych składek. Pod względem maksymalnej wysokości pułapów łaknienia niżki PZU wydaje się być firmą o najbardziej zrównoważonym systemie, pułapy wszystkich klas nie przekraczają bowiem 2020 zł. W przypadku Warty natomiast pułapy większe od tej wartości są notowane w przypadku aż 5 klas, a w klasie 3 pułap sięga 3520 zł. Jeszcze większy pułap łaknienia niżki na poziomie 3630 zł charakteryzuje 2 klasę w SBM firmy Samopomoc, w tej firmie jednak, z wyjątkiem jeszcze klasy 3, pułapy łaknienia niżki przyjmują wartości niższe niż 2000 zł. Analogiczne porównania mogą zostać przeprowadzone dla pozostałych parametrów, ale tendencje wśród nich są odzwierciedleniem tych obserwowanych dla pułapów łaknienia niżki. Porównania wartości rozkładów prawdopodobieństw stacjonarnych pozwalają na stwierdzenie, że o ile w przypadku PZU i Warty łaknienie niżki w wyraźny sposób zwiększa prawdopodobieństwa trafienia do klas lepszych, a uniknięcia gorszych, to w firmie Samopomoc, w której reguły przejścia SBM są łagodne (prawdopodobieństwo trafienia do klasy o największej niżce w długim okresie wynosi ponad 50%), łaknienie niżki wzmacnia jedynie i tak już wyraźną tendencję do gromadzenia się ubezpieczonych w najlepszych klasach.

Natężenie zjawiska łaknienia niżki, niezależnie od liczby klas w różnych zakładach ubezpieczeń, mogą ogólnie charakteryzować syntetyczne miary omówione w rozdziale 4.1. Wyniki porównania firm: PZU, Warta oraz Samopomocy przedstawia tabela 4.9.

Tabela 4.9. Porównanie zakładów ubezpieczeń pod względem ogólnych miar łaknienia niżek

	PZU	Warta	Samopomoc
x^* (w tys. zł) - AOR	0,949	0,998	0,717
λ^*	0,226	0,223	0,251
y^* (w tys.zł)	2,482	2,530	2,316
m^* (w tys.zł)	0,570	0,587	0,440

Źródło: Obliczenia własne

Na podstawie tabeli 4.9 stwierdzić można, że przy założonych parametrach w długim okresie zjawisko łaknienia zniżek najsilniej występować będzie w SBM Warty. Poza tym stwierdzić można, że systemy PZU i Warty nieznacznie tylko różnią się pod względem charakterystyk skutków łaknienia zniżek, co może wynikać z podobieństwa²⁴ samych systemów Warty i PZU. Dla porównania system Samopomocy okazuje się w dłuższym okresie czasu mniej wrażliwy na zjawisko łaknienia zniżki.

Różnice pomiędzy wnioskami z analizy sumarycznej i szczegółowej przeprowadzonej poprzednio, wynikają również z budowy wskaźników syntetycznych (w tym AOR²⁵), które premią klasy, do których dostanie się w długim okresie jest bardziej prawdopodobne. Dlatego właśnie wskaźnik AOR jest w przypadku SBM firmy Samopomoc zdecydowanie niższy niż w PZU pomimo, że w dwóch klasach tego systemu pułapy łaknienia zniżki znacznie przekraczają obserwowane w PZU. Natomiast, wskaźniki SBM firm PZU i Warty są porównywalne, pomimo znacznie wyższych pułapów łaknienia zniżek w niektórych klasach Warty. Podsumowując, wskaźniki syntetyczne są dobrą miarą służącą do ogólnych porównań systemów, ale analiza SBM pod kątem jego modyfikacji musi być przeprowadzona szczegółowo.

4.3 Wyniki modelu krótkookresowego

Model krótkookresowy odwołujący się do rekurencyjnej metody Howarda pozwala na obliczenie optymalnych pułapów łaknienia zniżki dla coraz dalszych horyzontów czasowych, w zależności od klasy na początku analizy. Wyniki zastosowania modelu przedstawia tabela 4.10.

Tabela 4.10. Optymalne pułapy łaknienia zniżki (w tys. zł) w firmie PZU według modelu krótkookresowego w zależności od horyzontu czasowego

Przewidywana długość ubezpieczenia	Klasa na początku analizy										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 rok	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 lata	0,35	0,73	0,6	0,75	0,38	0,32	0,36	0,47	0,32	0,36	0,26
3 lata	0,44	0,82	0,66	0,82	0,57	0,55	0,62	0,57	0,51	0,48	0,37
4 lata	0,44	0,87	0,71	0,99	0,75	0,75	0,74	0,76	0,63	0,59	0,38
5 lat	0,47	0,92	0,81	1,14	0,91	0,87	0,92	0,89	0,72	0,64	0,43
6 lat	0,48	1,00	0,92	1,28	1,02	1,02	1,04	0,98	0,78	0,70	0,48
7 lat	0,53	1,09	0,98	1,38	1,16	1,13	1,14	1,06	0,85	0,75	0,49

²⁴ Patrz załącznik 1 (Systemy bonus- malus w wybranych zakładach ubezpieczeń).

²⁵ AOR stosowany jest pracy Lemaire'a [1995], s.100 do porównywania nasilenia zjawiska łaknienia zniżki w systemach bonus-malus różnych krajów.

8 lat	0,55	1,14	1,04	1,50	1,26	1,22	1,22	1,13	0,89	0,77	0,52
9 lat	0,57	1,19	1,12	1,60	1,34	1,30	1,29	1,18	0,92	0,8	0,54
10 lat	0,59	1,26	1,17	1,67	1,42	1,36	1,34	1,21	0,95	0,83	0,54
11 lat	0,63	1,31	1,20	1,75	1,48	1,42	1,38	1,25	0,97	0,84	0,55
20 lat	0,70	1,50	1,38	2,00	1,68	1,58	1,51	1,34	1,03	0,89	0,58
30 lat	0,71	1,52	1,4	2,02	1,70	1,60	1,52	1,35	1,04	0,89	0,58
Nieskończona liczba lat	0,71	1,52	1,4	2,02	1,70	1,60	1,52	1,35	1,04	0,89	0,58

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 4.10 pokazuje, że pułapy łaknienia zniżek wzrastają wraz z przewidywanym czasem pozostawania w systemie, osiągając dla okresu 30-letniego wartości identyczne z otrzymanymi dzięki modelowi długookresowemu przy interwale $INT=0,01$.

Mając przed sobą jedynie rok ubezpieczenia, ubezpieczony nigdy nie będzie zatajał szkód, ponieważ ponosząc dodatkowe koszty nie będzie miał szans uzyskać żadnych korzyści. Natomiast już w perspektywie 2 lat zatajanie części szkód będzie opłacalne we wszystkich klasach i na przykład ubezpieczonemu będącemu w klasie czwartej będzie opłaciło się nie zgłaszać szkód do wysokości 750 zł, natomiast ubezpieczonemu będącemu w klasie najlepszej, czyli jedenastej, nie będzie opłacać się zgłaszanie szkód mniejszych lub równych 260 zł. Czynnikiem najbardziej różnicującym optymalne poziomy łaknienia zniżek pomiędzy klasami, zwłaszcza przy bliższych horyzontach czasowych, są różnice pomiędzy możliwymi zniżkami i zwyczajami składki po wyjściu z tych klas. Dla porównania różnice te przedstawiono w tabeli 4.11.

Tabela 4.11. Bezwzględne różnice pomiędzy stawkami w PZU w klasach, do których może trafić ubezpieczony po jednym roku

Klasa (i)	Stawka	Składka pod warunkiem zgłoszenia:			Bezwzględny wzrost składki w porównaniu z niezgłaszaniem szkód po zgłoszeniu	
		0 szkód	1 szkody	2 i więcej szkód	1 szkody	2 i więcej szkód
1	1,5	1,25	1,5	1,5	0,25	0,25
2	1,25	1	1,5	1,5	0,5	0,5
3	1	0,9	1,25	1,5	0,35	0,6
4	0,9	0,8	1,25	1,5	0,45	0,7
5	0,8	0,8	1	1,25	0,2	0,45
6	0,8	0,7	0,9	1	0,2	0,3
7	0,7	0,6	0,8	1	0,2	0,4
8	0,6	0,5	0,8	0,9	0,3	0,4
9	0,5	0,5	0,7	0,8	0,2	0,3
10	0,5	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4
11	0,4	0,4	0,5	0,8	0,1	0,4

Źródło: Obliczenia własne

Analiza danych z tabel 4.10 i 4.11 prowadzi do wniosku, że im większe różnice pomiędzy możliwymi zyskami ze zniżki składki, a możliwymi kosztami spowodowanymi zwyczajną składką, tym wyższych szkód nie opłaci się zgłaszać. To tłumaczy na przykład,

dlaczego przy horyzoncie 2-letnim pułap łaknienia zniżki w klasie 8 jest znacznie wyższy (470 zł) niż w klasach sąsiednich: 7 (360 zł) i 9 (320 zł). Przesuwanie horyzontu czasowego powoduje jednak, że różnice te tracą na znaczeniu, a większą rolę zaczynają odgrywać tendencje przedstawione już w modelu długookresowym.

Wyniki podane w tabeli 4.10 mogą także stanowić wskazówkę dla ubezpieczonego, jakie decyzje odnośnie pułapu łaknienia zniżki powinien podjąć, jeżeli wie, że wypadek podlegający ubezpieczeniu zdarza mu się przeciętnie raz na nieco ponad 3 lata²⁶. Rozważmy sytuację ubezpieczonego będącego na początku w klasie 3 (początkowej), który ma przed sobą 10 lat ubezpieczenia. W pierwszym roku powinien nie zgłaszać szkód do wysokości 1170 zł. Jeżeli nie zgłosi żadnej szkody, to w kolejnym roku będąc w klasie czwartej nie będzie mu się opłacało zgłaszać szkód do wysokości 1600 zł itd. Kolejne wartości optymalnego dla niego pułapu łaknienia zniżki, jeżeli co roku będzie awansował do wyższej klasy, można odczytać z tabeli 4.10 przesuwając się za każdym razem w prawo (awans do kolejnej klasy) i w górę (wraz z upływem czasu przybliża się horyzont czasowy). W przypadku, gdyby ubezpieczonemu przydarzyła się szkoda wyższa od optymalnego pułapu, powinna ona zostać zgłoszona i ubezpieczony trafi do klasy o wyższej składce, ale aż do ostatniego okresu, niezależnie od klasy mogą mu się przydarzyć szkody o takiej wysokości, że nie będzie mu się opłacało ich zgłaszać. Po zapłaceniu ostatniej składki ubezpieczenia nie będzie mu się natomiast opłacało zatajać żadnych szkód.

Zdyskontowane na początek pierwszego okresu oczekiwane koszty, jakie ubezpieczony poniesie w związku z ubezpieczeniem w zależności od klasy początkowej oraz okresu czasu, jaki zamierza pozostać w systemie, przedstawia tabela 4.12. Kosztem przy horyzoncie jednego roku jest oczywiście zapłacona z góry składka za ten rok, której wysokość zależy od klasy, w której znajdzie się ubezpieczony. Oczekiwane koszty przy odleglejszych horyzontach czasowych uwzględniają prawdopodobieństwa znalezienia się w określonych klasach oraz koszty, jakie się w nich ponosi. I tak, dla ubezpieczonego zaczynającego w klasie początkowej i wiążącego się z ubezpieczycielem na 10 lat, oczekiwana suma zdyskontowanych na początek pierwszego okresu składek ubezpieczeniowych i kosztów związanych z optymalną dla niego strategią zatajania szkód wynosi 6844 zł. Dla dwukrotnie dłuższego okresu ubezpieczenia koszty wyniosą 9905 zł. Z powodu uwzględnienia stopy procentowej koszty te wzrastają coraz wolniej i zbiegają do kosztów obliczonych przy użyciu modelu długookresowego.

²⁶ Podana w założeniach szkodowość $\lambda = 0,3$ oznacza, że ubezpieczony może się spodziewać przeciętnie trzech szkód w ciągu 10 lat.

Tabela 4.12. Koszty (w tys. zł) ponoszone przez ubezpieczonego w PZU przy optymalnej strategii łaknienia zniżki według modelu krótkookresowego

Przewidywana długość ubezpieczenia	Klasa na początku analizy										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 rok	1,440	1,200	0,960	0,864	0,768	0,768	0,672	0,576	0,480	0,480	0,384
2 lata	2,463	2,104	1,866	1,721	1,612	1,415	1,234	1,086	1,040	0,859	0,818
3 lata	3,351	2,992	2,696	2,540	2,287	2,019	1,797	1,645	1,452	1,300	1,265
4 lata	4,197	3,794	3,491	3,225	2,913	2,612	2,358	2,084	1,903	1,754	1,688
5 lat	4,971	4,561	4,169	3,854	3,518	3,174	2,819	2,545	2,360	2,166	2,102
6 lat	5,703	5,225	4,796	4,458	4,078	3,646	3,286	3,002	2,766	2,574	2,509
7 lat	6,351	5,841	5,384	5,009	4,556	4,117	3,741	3,403	3,168	2,975	2,898
8 lat	6,945	6,412	5,922	5,486	5,025	4,568	4,139	3,801	3,562	3,350	3,274
9 lat	7,494	6,934	6,393	5,947	5,469	4,961	4,531	4,186	3,925	3,714	3,638
10 lat	7,997	7,397	6,844	6,381	5,856	5,345	4,907	4,538	4,278	4,066	3,985
11 lat	8,446	7,834	7,263	6,760	6,232	5,713	5,249	4,881	4,619	4,399	4,318
20 lat	11,265	10,564	9,905	9,344	8,759	8,188	7,699	7,308	7,030	6,805	6,720
30 lat	13,004	12,293	11,624	11,057	10,467	9,890	9,400	9,006	8,727	8,501	8,416
Nieskończona liczba lat	15,707	14,995	14,326	13,758	13,167	12,591	12,1	11,707	11,427	11,201	11,116

Źródło: Obliczenia własne

Krótkookresowy model Howarda pozwala na dokładne wyznaczenie optymalnych pułapów łaknienia zniżki w przypadku pojedynczego ubezpieczonego. Kwestia zastosowania modelu przez zakład ubezpieczeń jest bardziej skomplikowana, gdyż modelownie przy jego pomocy całej zbiorowości ubezpieczonych wymaga podania liczby ubezpieczonych w poszczególnych klasach oraz przeciętnego horyzontu czasowego, jaki biorą oni pod uwagę planując swoje decyzje. Te dodatkowe założenia mogą się jednak okazać istotne, co zostanie pokazane w kolejnym podrozdziale przedstawiającym porównanie wyników modeli długo i krótkookresowego. Bez wątplenia zaletą modelu krótkookresowego jest jego uniwersalność. Podając odpowiednie parametry wejściowe otrzymać można optymalne decyzje dla dowolnego horyzontu czasowego.

4.4 Porównanie wyników modelu długo i krótkookresowego

W poprzednich punktach przedstawione zostały wyniki zastosowania modeli krótkookresowego i długookresowego do wyznaczenia optymalnych z punktu widzenia ubezpieczonego pułapów łaknienia zniżki. Model długookresowy pozwala na analizę SBM jedynie w dostatecznie długim okresie, co może utrudniać zastosowanie go w praktyce.

Model krótkookresowy wymaga natomiast większej liczby parametrów początkowych. Wyniki otrzymywane z modelu długookresowego są jednak granicznymi wynikami, do jakich zdążają rezultaty otrzymane dzięki modelowi krótkookresowemu przy coraz odleglejszych horyzontach czasowych.

Zarówno dla zakładu ubezpieczeń jak i dla klienta ważne jest, którą z metod należy stosować w jakich okolicznościach, oraz jak istotne jest uwzględnienie w analizie horyzontu czasowego.

Porównanie obu modeli z punktu widzenia klienta przeprowadzone jest za pomocą symulacji, która pozwala na obliczenie kosztów jakie ponosiłby ubezpieczony, stosujący w praktyce decyzje wyznaczone za pomocą każdego z modeli, przy różnych wariantach długości ubezpieczenia. Rozważymy trzy strategie, które ubezpieczony mógłby wziąć pod uwagę:

- zgłaszanie wszystkich szkód (S1),
- wybór pułapów łaknienia zniżki obliczonych za pomocą modelu długookresowego (S2),
- wybór pułapu łaknienia zniżki obliczonego za pomocą modelu krótkookresowego (S3).

Oczekiwane koszty związane z zastosowaniem tych strategii przedstawia tabela 4.13.

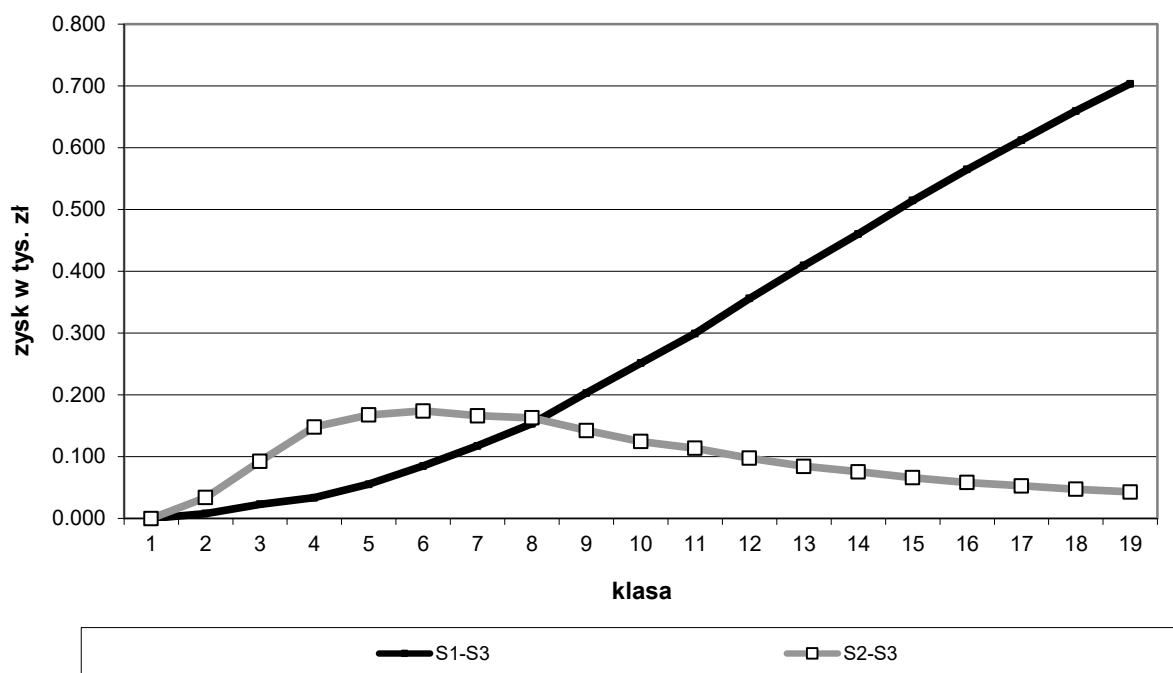
Tabela 4.13. Porównanie oczekiwanych kosztów (w tys. zł) ponoszonych przez ubezpieczonego w PZU zaczynającego w klasie 3 i stosującego strategie S1, S2 i S3 w zależności od rozpatrywanego horyzontu czasowego

Horyzont czasowy w latach	S1	S2	S3
1	0,960	0,960	0,960
2	1,874	1,900	1,866
3	2,719	2,789	2,696
4	3,524	3,639	3,491
5	4,224	4,336	4,169
6	4,881	4,969	4,796
7	5,502	5,550	5,384
8	6,075	6,084	5,922
9	6,596	6,536	6,393
10	7,095	6,968	6,844
11	7,562	7,376	7,263
12	7,990	7,731	7,634
20	10,650	9,945	9,905
30	12,669	11,645	11,624
50	14,613	13,316	13,308

Źródło: Obliczenia własne

Najkorzystniejszą z punktu widzenia ubezpieczonego strategią, dla każdego rozważanego horyzontu czasowego jest (S3) dlatego, że jest to strategia dokładnie dopasowana do wziętego pod uwagę okresu ubezpieczenia. Dla ułatwienia wyciągnięcia wniosków można zatem porównać różnice pomiędzy (S3) a pozostałymi strategiami. Różnice kosztów zaprezentowane są na wykresie 4.8.

Wykres 4.8 Różnice kosztów pomiędzy wybranymi strategiami ubezpieczonego



Źródło: Opracowanie własne

Zbliżanie się różnicy strategii S2 i S3 do 0 (jasnoszara linia) na wykresie 4.8 wskazuje, że im dalszy jest rozpatrywany horyzont czasowy, tym koszty ponoszone przy zastosowaniu strategii wyznaczonej za pomocą modelu długookresowego zbliżają się do optymalnych kosztów uzyskanych za pomocą modelu krótkookresowego. Różnica pomiędzy nimi się zmniejsza. Z drugiej strony im dalszy horyzont czasowy tym bardziej opłacalne staje się niezgłaszanie szkód. Różnica oczekiwanych kosztów pomiędzy strategiami zakładającymi zatajanie szkód i strategią zgłaszania wszystkich szkód (czarna linia na wykresie 4.8) staje się znaczna. Warto także zauważyć, że jeżeli ubezpieczony spędzi w systemie, przy niezmiennych się warunkach, poniżej 8 lat to optymalny pułap łaknienia zniżki, obliczony za pomocą modelu długookresowego, narazi go na koszty większe od tych, jakie ponosiłby zgłaszając wszystkie szkody. Jest to ważna obserwacja, bowiem w praktyce ubezpieczeni zmieniają co pewien czas ubezpieczycieli, zakłady ubezpieczeń natomiast zmieniają co kilka lat systemy bonus-malus. Tak więc z punktu widzenia ubezpieczonego kluczowe znaczenie dla wyboru poziomu łaknienia zniżki ma przewidywana liczba lat, jaką zamierza być ubezpieczony w danej firmie. Jeżeli jest to okres 12 lat lub dłuższy, różnice w finansowych skutkach stosowania modelu krótko i długookresowego nie przekraczają 100 zł.

Z punktu widzenia zakładu ubezpieczeń, oceniającego, jak silne jest zjawisko łaknienia zniżki w danym SBM, na wyniki wpłynąć może: horyzont czasowy, jaki ubezpieczeni biorą

pod uwagę oraz struktura ubezpieczonych według klas. Im dłuższy horyzont czasowy brany pod uwagę przez ubezpieczonych oraz im bardziej struktura ubezpieczonych według klas bliższa jest strukturze, wyznaczonej przez stacjonarny rozkład prawdopodobieństwa, tym bardziej pułapy łaknienia zniżki są zbliżone do obliczonych za pomocą modelu długookresowego. Wykres 4.9 przedstawia wpływ obu wyszczególnionych wyżej czynników. Jest on porównaniem uśrednionej wielkości pułapów łaknienia zniżki AOR (n), w zależności od przeciętnego horyzontu czasowego, jaki biorą pod uwagę ubezpieczeni, dla dwóch założonych wariantów rozkładów początkowych prawdopodobieństwa d_0 . Pierwszy wariant $d_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

można interpretować jako sytuację, w której na początku wszyscy ubezpieczeni znajdują się w klasie 3 (początkowej). Drugi wariant

$$d_0 = \left[\frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \ \frac{1}{11} \right]$$

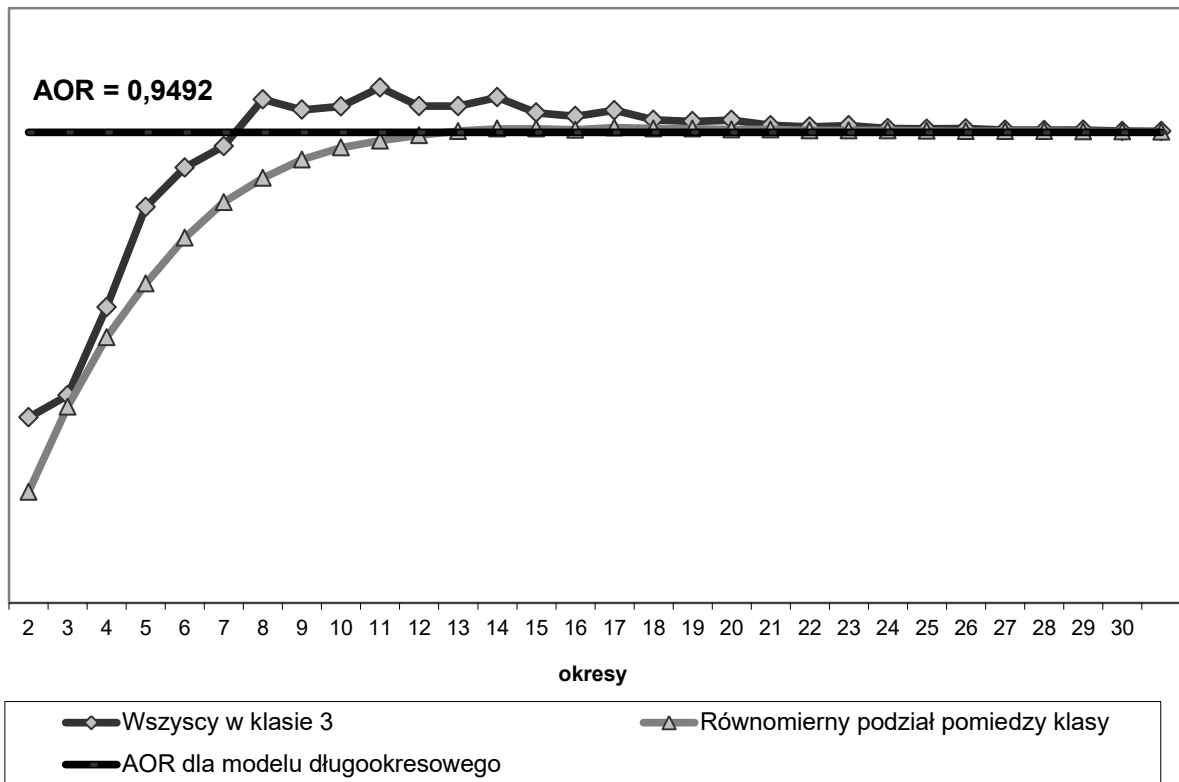
zakłada, że na początku ubezpieczeni są proporcjonalnie rozmieszczeni we wszystkich klasach.

Zarówno pułapy łaknienia zniżek, jak i struktura ubezpieczonych w klasach, potrzebne do obliczenia AOR(n), zmieniają się zależnie od horyzontu czasowego, jaki biorą pod uwagę ubezpieczeni.

Obliczenia wskazują, że dla wariantu pierwszego średnia wysokość pułapu łaknienia zniżek dla coraz dalszych horyzontów czasowych gwałtownie rośnie, począwszy od horyzontu dwu -okresowego. Jeśli ubezpieczeni biorą pod uwagę horyzont dłuższy niż 8 lat, to średni pułap łaknienia zniżek w ich przypadku przekroczy średni pułap otrzymany za pomocą modelu długookresowego, ponieważ duża część ubezpieczonych będzie dalej pozostawać w klasach gorszych, w których pułapy łaknienia zniżki są relatywnie wysokie. Jednak stopniowo średnia wartość pułapu łaknienia zniżek będzie dążyła ku długookresowemu średniemu pułapowi łaknienia zniżki tak, że w perspektywie powyżej 14 – 15 lat można przyjąć, że wyniki staną się bardzo zbliżone.

W wariacie drugim, wyniki stają się zbliżone do otrzymanych w modelu długookresowym już przy założeniu, że ubezpieczeni przy podejmowaniu decyzji o niezgłaszaniu szkód biorą pod uwagę horyzont 10-letni lub dłuższy.

Wykres 4.9. Zależność AOR(n) od horyzontu czasowego dla wybranych rozkładów początkowych



Źródło: Opracowanie własne

4.5 Analiza wrażliwości rozwiązania

Ważnym etapem większości analiz statystycznych jest badanie wpływu doboru parametrów na rozwiązanie. Analiza wrażliwości pozwala nie tylko na przewidywanie ewentualnych zmian rozwiązania pod wpływem zmieniających się parametrów, ale także pomaga wyciągnąć ogólne wnioski w sytuacji, w której wartości części parametrów nie można dokładnie ustalić.

4.5.1 Rozwiązanie w zależności od typu rozkładu

W podrozdziale 2.4 scharakteryzowane zostały najczęściej używane w ubezpieczeniach komunikacyjnych rozkłady wysokości szkód oraz liczby szkód. W tym miejscu zostaną

porównane wyniki modelu otrzymane przy ich zastosowaniu. W celu sprawdzenia wpływu typu rozkładu, a nie parametrów, przyjmuje się następujące założenia:

- Wartości oczekiwane i wariancje rozkładów: gamma i logarytmiczno-normalnego, użytych do modelowania wysokości szkód są identyczne i wynoszą $EX=2$ (tys. zł), $D^2X=2$.
- Wartości oczekiwane rozkładów liczby szkód: Poissona oraz ujemnego dwumianowego są identyczne $EX= 0,3$, wariancja w przypadku rozkładu Poissona wynosi $\lambda =0,3$, a dla rozkładu ujemnego dwumianowego wybrany został parametr $a=1$, co pozwala na maksymalne odróżnienie go od rozkładu Poissona.

Przyjmując dwa rozkłady wysokości szkód oraz dwa rozkłady liczby szkód można przeprowadzić analizę dla 4 modeli:

- Rozkładu Poissona oraz logarytmiczno-normalnego – model 1,
- Rozkładu ujemnego dwumianowego oraz logarytmiczno-normalnego – model 2,
- Rozkładu Poissona oraz gamma – model 3,
- Rozkładu ujemnego dwumianowego oraz gamma – model 4.

Ogólne wyniki zastosowania modelu długookresowego do wyznaczenia optymalnego poziomu łaknienia zniżki w SBM firmy PZU zaprezentowane są w tabeli 4.14.

Tabela 4.14 Porównanie wpływu typu rozkładu liczby i wysokości szkód na wielkości charakteryzujące wyniki modelowania

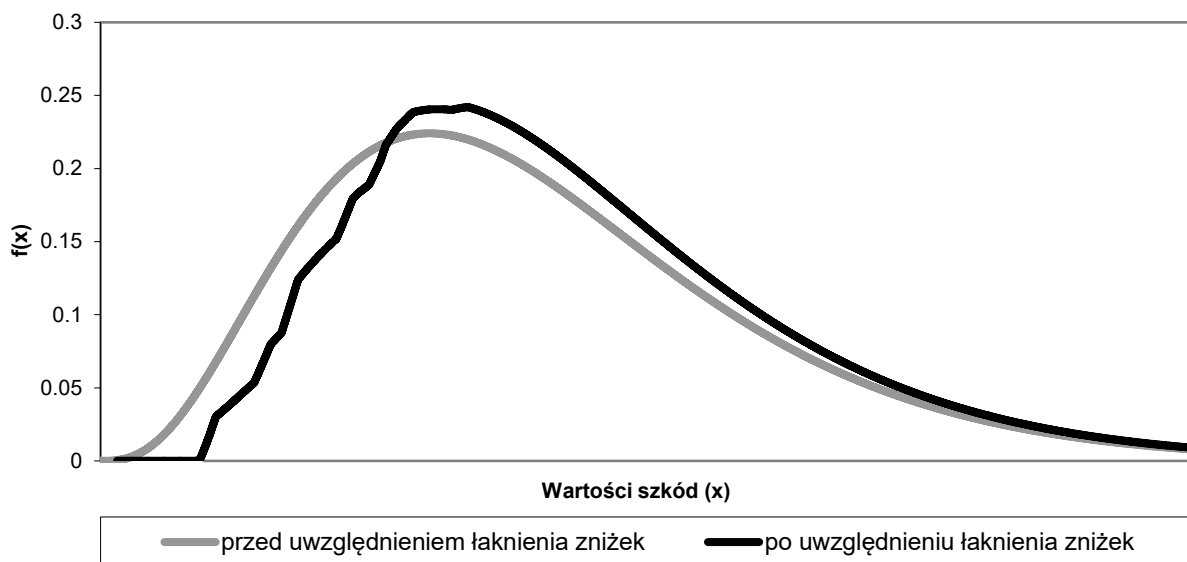
Wielkości	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
AOR	0,98852	0,92258	0,94917	0,8944
λ^*	0,23366	0,24102	0,22629	0,2312
y^* (w tys.zł)	0,69776	0,66224	0,56964	0,5419
m^* (w tys.zł)	2,39277	2,33622	2,32222	2,4385

Źródło: Obliczenia własne

Największą wartość AOR daje kombinacja rozkładu Poissona i logarytmiczno-normalnego. Wykorzystanie rozkładu gamma zamiast logarytmiczno-normalnego, jak też ujemnego dwumianowego zamiast Poissona, powoduje obniżenie średnich progów łaknienia zniżki. Wykorzystanie rozkładu logarytmiczno-normalnego, pomimo, że zwiększa wysokości pułapu łaknienia zniżki, ma mniejszy wpływ na efektywną szkodowość niż wykorzystanie rozkładu gamma, co można uzasadnić większym prawdopodobieństwem wystąpienia najmniejszych szkód w przypadku rozkładu gamma. Rozkład logarytmiczno – normalny bywa często podawany jako rozkład najlepiej

dopasowany do obserwowanych wysokości szkód²⁷. Warto zauważyć, że fakt ten nie musi wykluczać przyjęcia rozkładu gamma (lub innego) jako rozkładu szkód rzeczywistych, gdyż zjawisko łaknienia zniżek wpływa na zmianę kształtu rozkładu szkód. Przykład porównania funkcji prawdopodobieństw rozkładu szkód rzeczywistego (gamma $a=4$, $b=1$) i po przekształceniu przez zjawisko łaknienia zniżek przedstawia wykres 4.10.

Wykres 4.10. Porównanie rozkładów wysokości szkód rzeczywistych i obserwowanych



Źródło: Opracowanie własne.

Rozkład wysokości szkód po uwzględnieniu zjawiska łaknienia zniżek został wyznaczony na podstawie rozkładów szkód dla poszczególnych klas, czyli uciętych rozkładów gamma. Ogólny rozkład wysokości szkód jest ich mieszanką, przy czym wagi każdego z mieszanych rozkładów stanowią prawdopodobieństwa stacjonarne znalezienia się w klasie o tym rozkładzie.

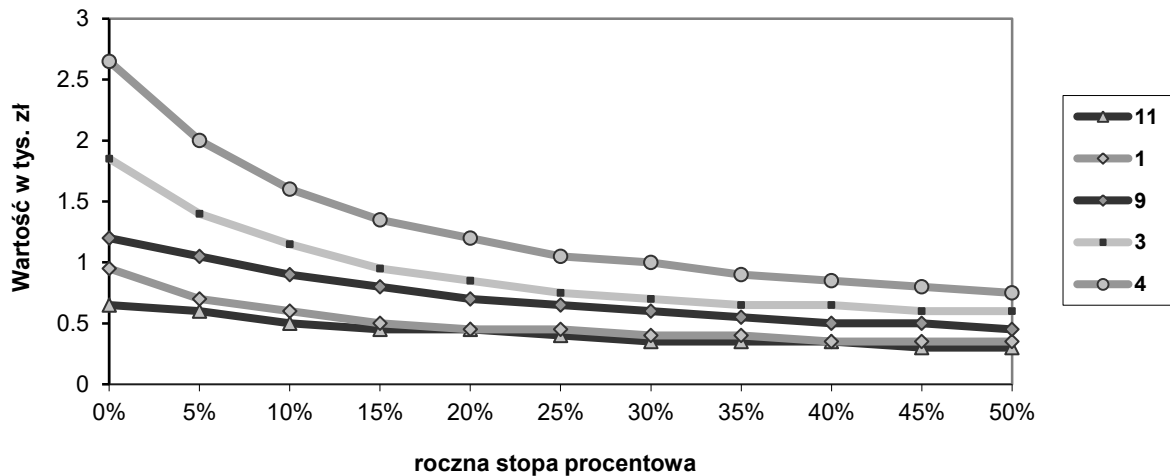
4.5.2 Rozwiązanie w zależności od stopy procentowej

Wartość pieniądza w czasie w istotny sposób wpływa na decyzję, czy zapłacić za szkodę natychmiast, czy też zgodzić się na zwiększenie składki w ciągu kilku następnych lat. Decyzję taką podejmuje ubezpieczony. Dodać tu należy, że pod uwagę brana jest realna stopa procentowa. Zależność pomiędzy stopą procentową, a poziomem łaknienia zniżki jest ujemna, ponieważ wyższa stopa procentowa oznacza, że pieniądz dziś jest relatywnie więcej wart niż w przyszłości. Zależności pomiędzy stopą procentową a pułapami łaknienia zniżki w

²⁷ Porównaj przykłady w podrozdziale 2.1.2

wybranych klasach przy założeniu, że pozostałe parametry zostały przyjęte tak, jak opisano w rozdziale 4.1 przedstawia wykres 4.11. oraz tabela 4.15

Wykres 4.11. Zależność pułapów łaknienia zniżki od poziomu stopy procentowej dla wybranych klas w SBM firmy PZU



Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 4.15. Pułapy łaknienia zniżki (w tys. zł) w zależności od stopy procentowej

Klasy	Poziomy rocznej stopy procentowej											
	0%	5%	10%	15%	20 %	25%	30%	35%	40 %	45%	50%	
1	0,95	0,70	0,60	0,50	0,45	0,45	0,40	0,40	0,35	0,35	0,35	
2	2,05	1,50	1,25	1,05	0,95	0,85	0,80	0,75	0,70	0,70	0,65	
3	1,85	1,40	1,15	0,95	0,85	0,75	0,70	0,65	0,65	0,60	0,60	
4	2,65	2,00	1,60	1,35	1,20	1,05	1,00	0,90	0,85	0,80	0,75	
5	2,20	1,70	1,35	1,10	0,95	0,85	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	
6	2,05	1,60	1,30	1,10	0,90	0,80	0,75	0,65	0,60	0,55	0,55	
7	1,85	1,50	1,25	1,10	0,95	0,85	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	
8	1,60	1,35	1,15	1,00	0,90	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	
9	1,20	1,05	0,90	0,80	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,50	0,45	
10	1,00	0,90	0,80	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,50	0,45	0,45	
11	0,65	0,60	0,50	0,45	0,45	0,40	0,35	0,35	0,35	0,30	0,30	

Źródło: Obliczenia własne

Przy stopie procentowej 0% wartość pieniądza w czasie nie zmienia się, a pułapy łaknienia zniżki są największe. Przy coraz wyższych poziomach rocznej stopy procentowej pułapy łaknienia zniżki są coraz mniejsze, ale nawet przy stopie procentowej wynoszącej 50% opłacałoby się w długim okresie nie zgłaszać szkód o wartości nie większej niż 300 – 750 zł zależnie od klasy. Świadczy to o tym, że zjawisko łaknienia zniżek jest opłacalne dla ubezpieczonego niezależnie od stopy procentowej, gdyż w praktyce nie występują sytuacje, w których realna stopa procentowa osiąga tak wysoki poziom.

4.5.3 Rozwiązanie w zależności od szkodowości

Liczba szkód w ciągu roku modelowana jest w tej pracy za pomocą rozkładów Poissona i ujemnego dwumianowego. Wartość oczekiwana tych rozkładów zwana szkodowością jest parametrem, który istotnie wpływa na otrzymywane wyniki modelu. Dla zbadania tego wpływu wybrany został rozkład Poissona z parametrem λ , będącym jednocześnie wartością szkodowości. Wartości pułapów łaknienia zniżki obliczone dla poszczególnych klas i poziomów szkodowości przedstawia tabela 4.16

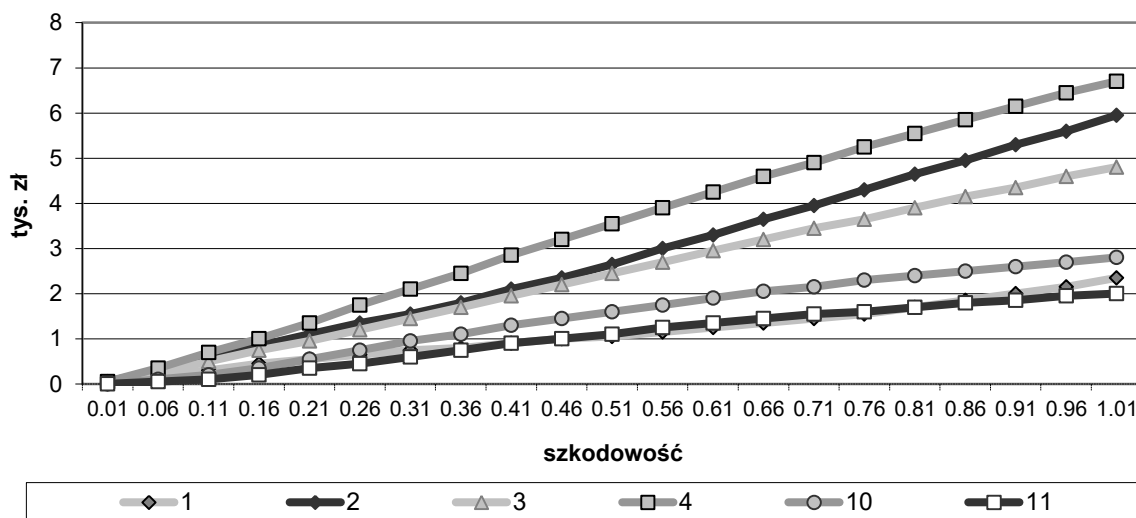
Tabela 4.16. Pułapy łaknienia zniżki (w tys. zł) w zależności od szkodowości

Szkodowość	Klasa na początku analizy										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,01	0,00	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,06	0,20	0,30	0,25	0,35	0,30	0,25	0,20	0,20	0,15	0,10	0,05
0,11	0,30	0,60	0,50	0,70	0,55	0,50	0,45	0,40	0,30	0,20	0,10
0,16	0,45	0,85	0,75	1,00	0,85	0,80	0,70	0,60	0,45	0,35	0,20
0,21	0,55	1,10	0,95	1,35	1,15	1,05	1,00	0,90	0,65	0,55	0,35
0,26	0,65	1,35	1,20	1,75	1,45	1,35	1,30	1,15	0,85	0,75	0,45
0,31	0,75	1,55	1,45	2,10	1,75	1,65	1,60	1,40	1,10	0,95	0,60
0,36	0,80	1,80	1,70	2,45	2,05	1,95	1,85	1,65	1,30	1,10	0,75
0,41	0,90	2,10	1,95	2,85	2,35	2,25	2,15	1,90	1,45	1,30	0,90
0,46	1,00	2,35	2,20	3,20	2,65	2,50	2,40	2,10	1,65	1,45	1,00
0,51	1,05	2,65	2,45	3,55	2,95	2,75	2,65	2,35	1,80	1,60	1,10
0,56	1,15	3,00	2,70	3,90	3,25	3,05	2,85	2,55	2,00	1,75	1,25
0,61	1,25	3,30	2,95	4,25	3,55	3,30	3,10	2,75	2,15	1,90	1,35
0,66	1,35	3,65	3,20	4,60	3,80	3,55	3,30	2,95	2,30	2,05	1,45
0,71	1,45	3,95	3,45	4,90	4,05	3,75	3,50	3,15	2,45	2,15	1,55
0,76	1,55	4,30	3,65	5,25	4,30	4,00	3,75	3,30	2,55	2,30	1,60
0,81	1,70	4,65	3,90	5,55	4,55	4,20	3,90	3,50	2,70	2,40	1,70
0,86	1,85	4,95	4,15	5,85	4,80	4,45	4,10	3,65	2,85	2,50	1,80
0,91	2,00	5,30	4,35	6,15	5,05	4,65	4,30	3,80	2,95	2,60	1,85
0,96	2,15	5,60	4,60	6,45	5,25	4,85	4,50	4,00	3,10	2,70	1,95

Źródło: Obliczenia własne

Charakter zależności między szkodowością a pułapami łaknienia zniżek wyraźniej pokazuje wykres 4.12

Wykres 4.12. Zależność pułapów łaknienia niżki od szkodowości dla wybranych klas w SBM firmy PZU

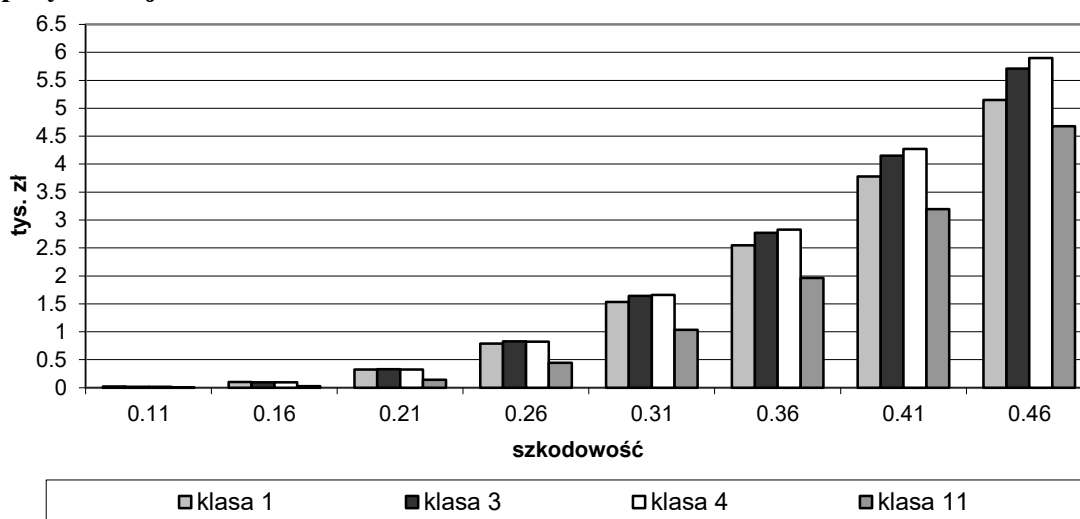


Źródło: Opracowanie własne

Zależność ta ma charakter zbliżony do liniowego, chociaż na przykład w klasie 11 wzrost poziomu łaknienia niżki pod wpływem wzrostu szkodowości o jednostkę jest coraz wolniejszy.

Pułapy łaknienia niżki rosną wraz ze wzrostem szkodowości, zatem im więcej wypadków przeciętnie popełnia kierowca, tym wyższe szkody opłaca mu się zatajać i tym większe przynosi mu to oszczędności. Sumę oszczędności, jakie łaknienie niżki pozwala osiągnąć kierowcy w SBM firmy PZU przy różnych poziomach szkodowości w porównaniu z sytuacją, w której zgłaszałby wszystkie szkody, przedstawia wykres 4.13.

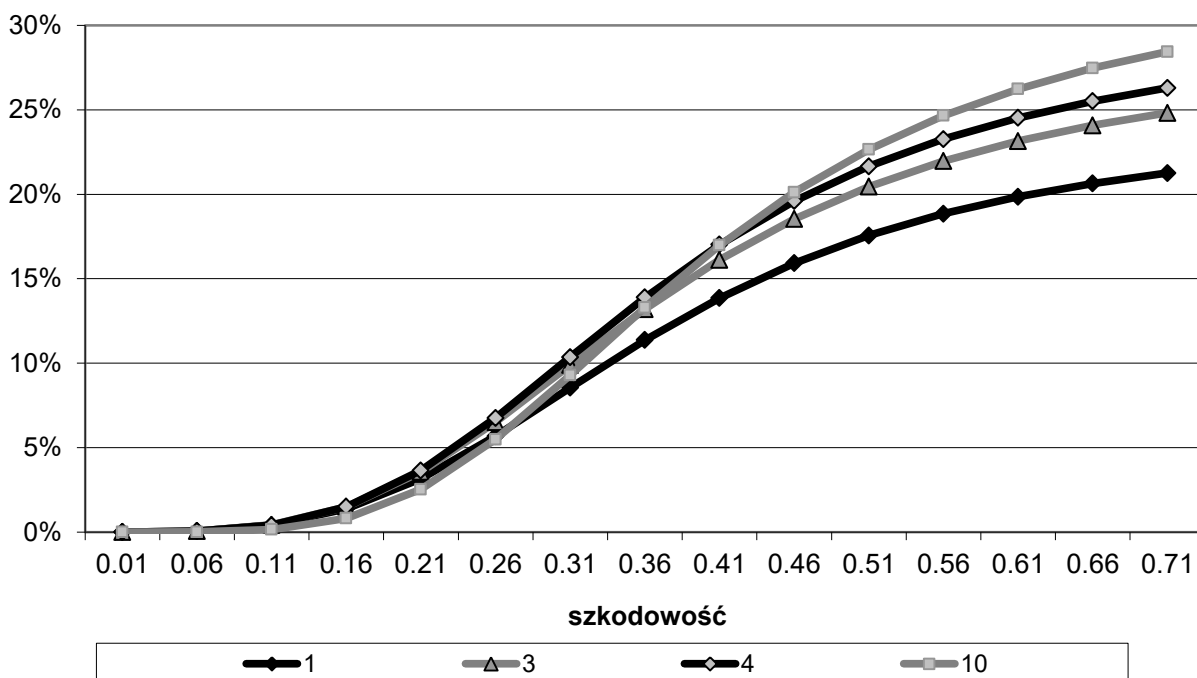
Wykres 4.13. Oszczędności ubezpieczonego dzięki łaknieniu niżki w wybranych klasach przy różnej szkodowości



Źródło: Opracowanie własne

Wykres 4.13 pokazuje, że oszczędności wynikające ze stosowania łaknienia zniżek są tym większe, im wyższa jest szkodowość ubezpieczonego i rosną tym szybciej im wyższy jest pułap łaknienia zniżki w danej klasie w porównaniu do innych klas. Charakter zależności pomiędzy szkodowością ubezpieczonego a zyskiem osiągniętym dzięki łaknieniu zniżki lepiej pozwala ocenić wykres 4.14 pokazujący oszczędności, jakie odnosi ubezpieczony jako odsetek kosztów ubezpieczenia.

Wykres 4.14 Zysk osiągnięty dzięki łaknieniu zniżki jako odsetek całkowitych kosztów poniesionych przez ubezpieczonego dla wybranych klas

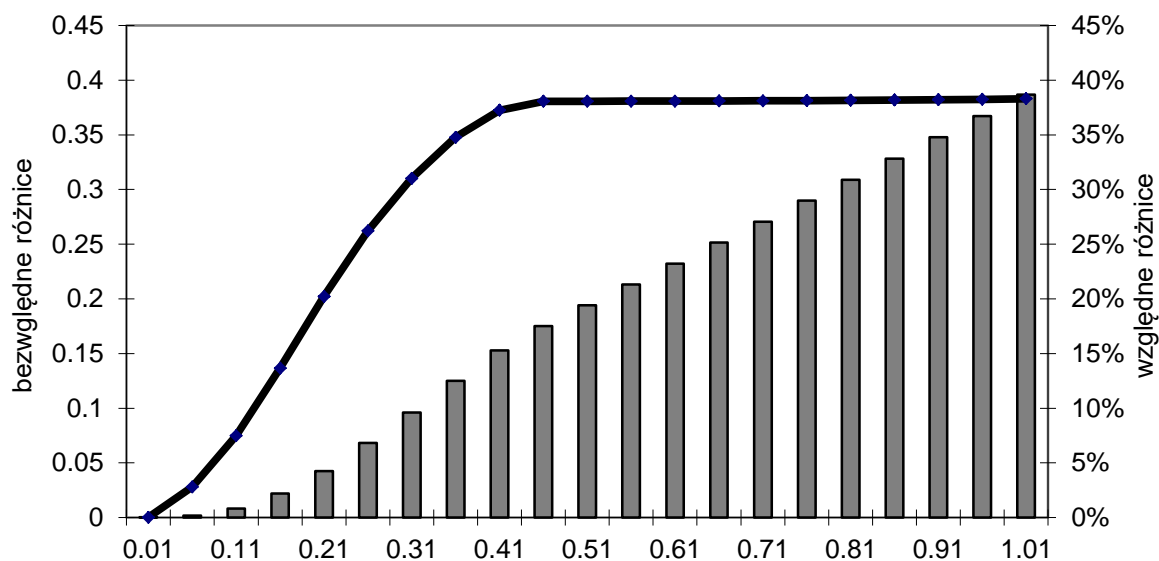


Źródło: Opracowanie własne

Na wykresie 4.14 wyraźnie widać, że wraz ze wzrostem szkodowości względna opłacalność łaknienia zniżki najpierw rośnie coraz szybciej, by następnie rosnąć coraz wolniej. Na początkowy szybki wzrost składają się wzrost zysku z niezgłaszania szkód przy coraz większej szkodowości oraz związany z tym spadek kosztów ubezpieczenia (niższe składki). Bardzo wysoka szkodowość powoduje jednak trwale pozostawanie w najdroższych klasach, sprawiając że względne oszczędności z tytułu łaknienia zniżki, odniesione do całkowitych kosztów poniesionych przez ubezpieczonego stabilizują się.

Inną kwestią jest wpływ wysokości szkodowości rzeczywistej na szkodowość efektywną. Zależność pomiędzy tymi dwoma wartościami przedstawiona została w postaci różnicy pomiędzy nimi, czyli spadku szkodowości wywołanego przez łaknienie zniżki. Różnica ta, odniesiona do szkodowości rzeczywistej jest nazywana dalej względnym spadkiem szkodowości spowodowanym zjawiskiem łaknienia zniżki.

Wykres 4.15. Bezwzględne i względne różnice pomiędzy szkodowością rzeczywistą i efektywną w zależności od szkodowości rzeczywistej



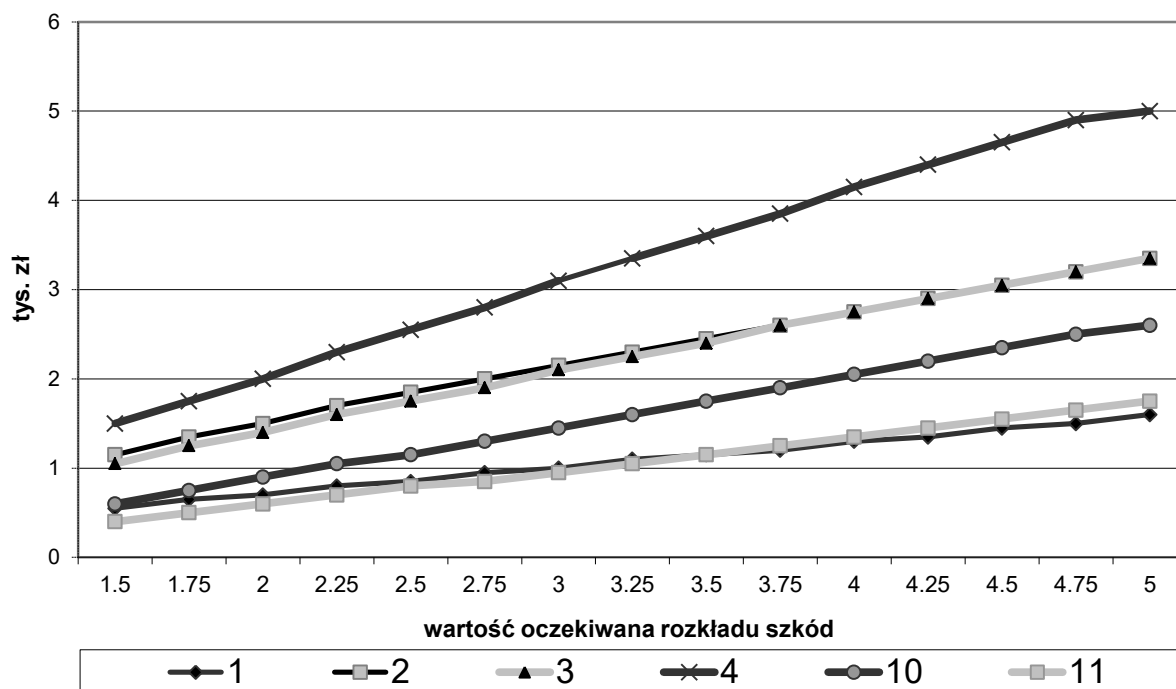
Źródło: Opracowanie własne

Wykres 4.15 pokazuje, że różnica między szkodowością efektywną a rzeczywistą jest tym większa im wyższy jest zakładany poziom szkodowości rzeczywistej. Do poziomu szkodowości około 0,4 różnica szkodowości wyrażona jako odsetek szkodowości rzeczywistej rośnie, natomiast powyżej utrzymuje się na stałym poziomie co świadczy o proporcjonalności szkodowości rzeczywistej i szkodowości efektywnej, jeśli rzeczywista szkodowość jest większa niż 0,4.

4.5.4 Rozwiązanie w zależności od przeciętnej wysokości szkody

Wpływ wartości średniej szkody na pułap łaknienia zniżki jest wyraźny. Obliczenia wskazują, że im większa jest średnia wartość szkody (przy niezmienionej wariancji rozkładu szkód) tym wyższe są pułapy łaknienia zniżek. Zależność tę graficznie ilustruje wykres 4.16 przedstawiający optymalne pułapy łaknienia zniżki w wybranych klasach w zależności od przyjętej średniej wysokości szkody w rozkładzie gamma. Zależność ta potwierdza się jednak również dla rozkładu logarytmiczno normalnego.

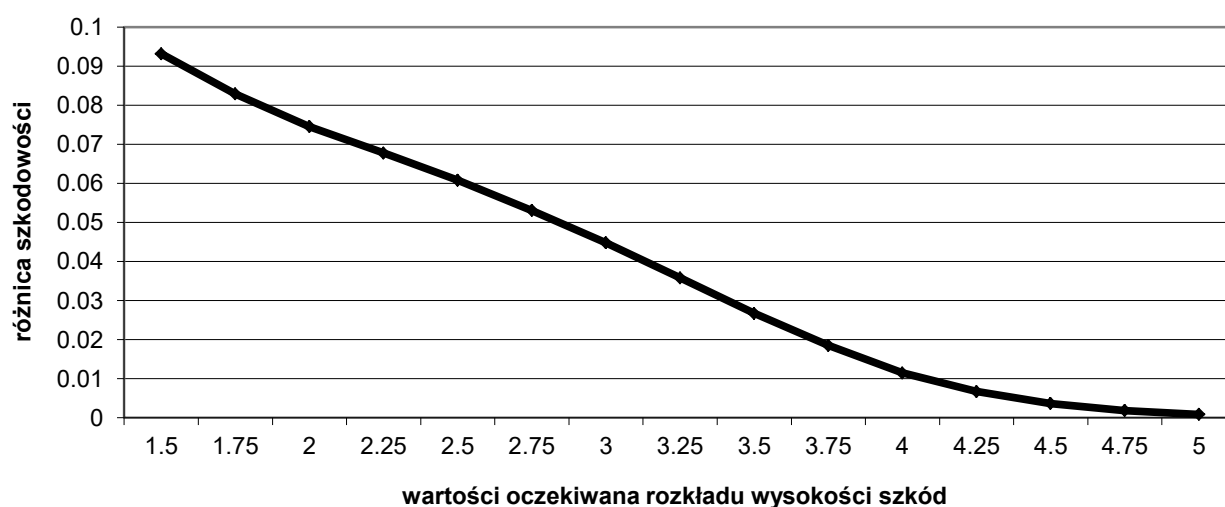
Wykres 4.16. Zależność pułapów łaknienia zniżki dla wybranych klas od wartości oczekiwanej rozkładu wysokości szkód



Źródło: Opracowanie własne.

Jak widać, im wyższa jest oczekiwana wartość szkody, tym silniejsze jest zjawisko łaknienia zniżki. Charakterystyczną cechą jest jednak to, że pułapy łaknienia zniżek rosną wolniej niż wartość oczekiwana szkody, co powoduje, że wraz ze wzrostem wartości oczekiwanej szkody zjawisko to coraz mniej wpływa na parametry portfela obserwowanych szkód. Świadczą o tym wyniki obliczeń, które prezentuje wykres 4.17.

Wykres 4.17 Różnica pomiędzy szkodowością rzeczywistą a efektywną w zależności od wartości oczekiwanej rozkładu wysokości szkód



Źródło: Opracowanie własne

Obserwowana szkodowość różni się od rzeczywistej tym mniej, im wyższy jest poziom wartości oczekiwanej szkody, ponieważ pułapy łaknienia zniżki rosną wolniej niż kolejne badane wartości przeciętnej szkody.

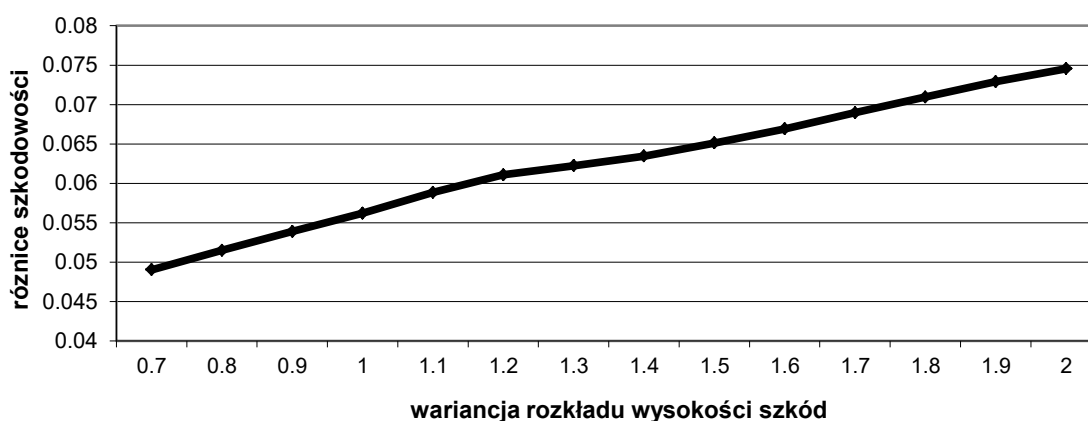
Przedstawione wyniki prowadzą do wniosku, że pomimo zwiększania się wartości pułapów łaknienia zniżek wraz ze wzrostem wartości oczekiwanej szkody, zjawisko to w coraz mniejszym stopniu wpływa na parametry obserwowane przez ubezpieczyciela, gdyż coraz mniejsza część szkód jest zatajana.

4.5.5 Rozwiązania w zależności od zróżnicowania wartości szkód

Drugim parametrem rozkładu wysokości szkód, który należy przeanalizować jest jego wariancja. Kierowcy nie jest bowiem obojętne, czy może się spodziewać szkód o zbliżonej wartości, czy też jest narażony na straty o większym zróżnicowaniu.

Dla klas niższych (z „malusem”) pułapy łaknienia zniżek wzrastają wraz z ze wzrostem zróżnicowania szkód, natomiast dla klas z „bonusem” większe zróżnicowanie szkód powoduje niewielkie obniżenie się pułapów łaknienia zniżek. W klasie, w której ubezpieczony płaci składkę podstawową pułap łaknienia zniżek nie zależy od zróżnicowania wysokości szkód. Fakt ten można tłumaczyć brakiem wpływu zróżnicowania wartości szkód na wysokość składki podstawowej. Tym samym nie wpływa on na koszty składek we wszystkich klasach, zatem można wnioskować, że wraz ze wzrostem zróżnicowania szkód relatywnie zwiększa się opłacalność łaknienia zniżek w klasach ze zwyżką, a spada w klasach ze zniżką. Zwiększenie zróżnicowania rzeczywistego rozkładu szkód wpływa za to wyraźnie na charakterystyki portfela. Wpływ na różnicę pomiędzy szkodowością rzeczywistą, a efektywną przedstawia wykres 4.18.

Wykres 4.18. Różnica między szkodowością rzeczywistą i obserwowaną w zależności od wariancji rozkładu wysokości szkód



Źródło: Opracowanie własne

Przedstawioną na wykresie 4.18 zależność wyjaśnić można tym, że przy coraz większej wariancji i niewiele tylko zmieniających się pułapach łaknienia zniżek prawdopodobieństwo niezgłoszenia szkody rośnie. Rośnie zatem liczba niezgłoszonych szkód, a co za tym idzie, różnice między parametrami rzeczywistymi a obserwowanymi przez ubezpieczyciela, na przykład pomiędzy szkodowością efektywną i rzeczywistą.

4.6 Próba modelowania zjawiska łaknienia zniżek w polskich warunkach

Przeprowadzenie obliczeń wymaga podania zakresu parametrów wejściowych. Realna stopa procentowa została przyjęta na poziomie 5%. Natomiast, aby wyznaczyć przedziały wartości oczekiwanej wysokości szkody oraz oczekiwanej częstości szkód, przeprowadzone zostały wstępne obliczenia przy różnych zakładanych wartościach tych parametrów w rozkładach, odpowiednio, gamma i Poissona. Wyniki tych obliczeń, pozwalające porównać rzeczywiste i obserwowane parametry, przedstawia tabela 4.17. Wyniki te pokazują wyraźnie, że największy wpływ na wielkość różnicy pomiędzy parametrami obserwowanymi a rzeczywistymi ma wartość szkodowości. Przy niewielkich wartościach szkodowości ($\lambda = 0,05$) różnice pomiędzy parametrami obserwowanymi i rzeczywistymi są minimalne.

Tabela 4.17. Obserwowane wartości przeciętnej szkody oraz liczby szkód w zależności od wartości rzeczywistych. Wstępne obliczenia

Wartość oczekiwana szkody EX (rzeczywista)	Wartość parametru λ (szkodowość rzeczywista)			
	0,05	0,15	0,25	0,35
2,5	2,500888 0,049982	2,557511 0,146126	2,823801 0,213313	3,213664 0,242614
3	3,000233 0,049996	3,044434 0,147403	3,318194 0,21795	3,747524 0,248486
3,5	3,500104 0,049998	3,535428 0,148159	3,819269 0,220841	4,240096 0,256584
4	4,000049 0,049999	4,027978 0,14869	4,306337 0,224211	4,69014 0,267993

Źródło: Obliczenia własne

W następnym etapie zostały przeprowadzone obliczenia, które pozwoliły zawęzić przedziały, w których znajdują się poszukiwane parametry do przedziału 4,15-4,25 dla

wartości oczekiwanej rozkładu szkód oraz 4,25%-4,3% dla szkodowości. Poszukiwania parametrów wśród tych wartości przyniosły wyniki przedstawione w tabeli 4.18

Tabela 4.18. Obserwowane wartości przeciętnej szkody oraz liczby szkód w zależności od wartości rzeczywistych. Obliczenia w przedziałach

Rzeczywista wartość przeciętnej szkody	Szkodowość rzeczywista					
	0,0425	0,0426	0,0427	0,0428	0,0429	0,043
4,15	4,211968	4,211703	4,211735	4,211767	4,212096	4,211831
	0,041872	0,04197	0,042068	0,042167	0,042265	0,042363
4,175	4,236969	4,236682	4,236715	4,236747	4,237098	4,236811
	0,041876	0,041974	0,042072	0,04217	0,042269	0,042367
4,2	4,261971	4,261661	4,261693	4,261725	4,262099	4,261789
	0,041879	0,041978	0,042076	0,042174	0,042272	0,042371
4,225	4,286973	4,286637	4,286669	4,286701	4,287101	4,286765
	0,041883	0,041981	0,04208	0,042178	0,042276	0,042374
4,25	4,311974	4,311612	4,311644	4,311676	4,312102	4,31174
	0,041887	0,041985	0,042083	0,042181	0,04228	0,042378

Zródło: Obliczenia własne.

Tabela 4.18 pokazuje, że otrzymane wyniki są bardzo zbliżone. Parą parametrów, które dają rozwiązanie najbardziej zbliżone do danych empirycznych (średnia szkoda o wartości 4238 zł i szkodowość 0,0423) jest wartość oczekiwana rozkładu gamma na poziomie 4,175 oraz szkodowość na poziomie 0,0429.

W tym miejscu przerwany został proces poszukiwania coraz dokładniejszych wartości parametrów, gdyż rozwiązanie przy tym poziomie dokładności pozwala już wyciągnąć pewne wnioski. Należy jednak zastrzec, iż otrzymane rozwiązanie jest jedynie pewnym przybliżeniem, najbardziej dopasowanym do danych empirycznych przy dokładności określonej przez badany zbiór możliwych decyzji. Wybrane rozwiązanie pozwala na obliczenie ważniejszych parametrów łaknienia zniżki, które prezentuje tabela 4.1

Tabela 4.19. Wyniki modelowania łaknienia zniżek w Polsce

Klasa (i)	x_i^* (w tys.zł)	v_i^0 (w tys.zł)	v_i^* (w tys.zł)	p_i^*	λ_i^*	m_i^{ub} (w tys.zł)	m_i^{ZU} (w tys.zł)	A_i^0	A_i^*
1	0,25	3,4448	3,4387	0,0581	0,0404	0,1238	4,425	0	0
2	0,5	3,2287	3,2226	0,1129	0,0381	0,245	4,675	0	0
3	0,4	3,067	3,0619	0,0914	0,039	0,1968	4,575	0	0
4	0,5	2,9324	2,9279	0,1129	0,0381	0,245	4,675	0,0001	0,0001
5	0,4	2,815	2,8117	0,0914	0,039	0,1968	4,575	0,0003	0,0002
6	0,35	2,6967	2,6942	0,0804	0,0395	0,1726	4,525	0,0012	0,0012
7	0,3	2,6045	2,6026	0,0693	0,0399	0,1482	4,475	0,0029	0,0027
8	0,25	2,5398	2,5385	0,0581	0,0404	0,1238	4,425	0,0044	0,0042
9	0,2	2,5043	2,5033	0,0468	0,0409	0,0992	4,375	0,0416	0,0411
10	0,15	2,4707	2,4698	0,0353	0,0414	0,0746	4,325	0,0399	0,0394
11	0,05	2,468	2,4673	0,0119	0,0424	0,025	4,225	0,9096	0,9111

Zródło: Obliczenia własne

Otrzymane wyniki sugerują, że zjawisko łaknienia zniżek w polskich warunkach nie ma wielkiego wpływu na obserwowaną przez ubezpieczyciela wartość średniej szkody oraz liczbę zgłaszanych szkód. Średniona szkodowość jest bowiem zaniżana o około 0,001. W klasie o najwyższym pułapie łaknienia zniżek szkodowość zaniżana jest o około 0,005. Średnia wartość obserwowanych szkód jest większa od rzeczywistej o około 60 zł, natomiast w klasach 2 i 4 o największych pułapach łaknienia zniżek o 437 zł. Pułapy łaknienia zniżki, nawet po uwzględnieniu wartości błędu wynikającego z przyjęcia $INT=0,05$, osiągają wartości nie większe od 550 zł, a w klasie o najwyższych zniżkach pułap łaknienia zniżki równy jest możliwej wartości błędu.

Przeprowadzając analogiczne obliczenia z uwzględnieniem dodatkowo rozkładów logarytmiczno-normalnego oraz ujemnego dwumianowego (dla 4 modeli) otrzymuje się zbliżone wyniki, co świadczy o stabilności rozwiązania. Parametry rozkładów dopasowanych do danych empirycznych zostały przedstawione w tabeli 4.20.

Tabela 4.20. Parametry innych rozkładów użytych do modelowania łaknienia zniżek w Polsce

Numer modelu	Rozkład wysokości szkód	Parametry	Rozkład liczby szkód	Parametry
1	gamma	$a=4,175 ; b=1$	Poissona	$\lambda = 0,043$
2	gamma	$a=4,175 ; b=1$	ujemny dwumianowy	$r=1 p=0,96$
3	logarytmiczno-normalny	$\mu =0,6817, \sigma =1,233$	Poissona	$\lambda = 0,042$
4	Logarytmiczno-normalny	$\mu =0,6817, \sigma =1,234$	ujemny dwumianowy	$r=1 p=0,9594$

Źródło: Opracowanie własne

Otrzymane powyżej wyniki mogą odbiegać od rzeczywistości ze względu na niekompletność danych empirycznych wziętych pod uwagę. Ponadto znaczny wpływ na otrzymane wyniki mają założenia dotyczące przyjmowanych rozkładów oraz ich parametrów. Warto zwrócić uwagę, że empiryczne dane, na których opierała się symulacja dotyczą jedynie średnich wartości wypłaconego odszkodowania oraz liczby zgłoszonych szkód, a nie ich rozkładów, które zostały przyjęte z góry. Wątpliwości budzić mogą także wartości tych parametrów. Parametr częstości szkód na poziomie 4,23% oznacza, że przeciętnie szkoda zgłaszana jest raz na około 23 lata. Doświadczenia życia codziennego sugerują, że nawet po uwzględnieniu zjawiska łaknienia zniżki dane te wydają się być zaniżone. Teza taka jest uzasadniona także porównaniem szkodowości w Polsce z notowaną, na przykład w Niemczech²⁸, na poziomie około 10%.

Otrzymane wyniki mogą również odbiegać od rzeczywistości, ponieważ inne założenia nie są spełnione. Modelowanie łaknienia zniżki wymagało przyjęcia założeń dotyczących

²⁸ Dane z Biuletynu PUNU z 1999 roku

zachowań ubezpieczonych, które są przyjęte arbitralnie. Niespełnione mogą być także założenia pełnej informacji zakładu ubezpieczeń oraz ubezpieczonego na temat rozkładu wysokości szkód oraz ich ilości.

Weryfikacja tych hipotez wymagałaby znajomości dokładnych danych empirycznych dotyczących rozkładów szkód i szkodowości. To pozwoliłoby ocenić trafność otrzymanych wyników i przyjętych założeń. Zbadanie zjawiska inną metodą, na przykład ankiety wśród ubezpieczonych, pozwoliłoby natomiast na ocenę przydatności modelu oraz realności przyjętych założeń.

Rozdział 5

Wnioski i podsumowanie

Zjawisko łaknienia zniżek związane jest z racjonalnym dążeniem ubezpieczonych do ograniczania kosztów, dlatego uzasadnione jest użycie do jego modelowania metod Howarda. Algorytm iteracyjny Howarda pozwalający na wyznaczenie pułapów optymalnych w długim okresie jest często stosowany w literaturze przedmiotu, ponieważ przy realistycznych założeniach pozwala na określenie optymalnych pułapów łaknienia zniżek i oszczędności, jakie przyniesie ubezpieczonemu ich znajomość, a na tej podstawie odpowiednich wartości parametrów ryzyka ubezpieczonego. Metoda ta pozwala na wyznaczenie wartości granicznych, co oznacza, że obliczone za jej pomocą wyniki dotyczą ubezpieczonych pozostających w systemie przez długi czas, w którym prawdopodobieństwa trafienia do poszczególnych klas stają się niezależne od klasy początkowej.

Wyniki obliczeń dla przykładowych parametrów i dla systemu bonus-malus firmy PZU pokazują, że optymalne zachowanie się ubezpieczonego skutkuje oszczędnościami płynącymi z większego prawdopodobieństwa znalezienia się w klasach zniżkowych w stosunku do wariantu, w którym zgłaszałby on wszystkie szkody. Oszczędności te są tym większe im niższa jest klasa oraz im wyższy pułap łaknienia zniżek w danej klasie, co prowadzi do zgodnego z intuicją wniosku, że najbardziej zyskują na niezgłaszaniu szkód kierowcy z klas niższych oraz tych, w których zgłoszenie szkody wiązałoby się z dużą stratą finansową.

Z punktu widzenia ubezpieczyciela zjawisko łaknienia zniżek powoduje zmiany rzeczywistych parametrów portfela. Ma to duże znaczenie praktyczne, gdyż z powodu zjawiska łaknienia zniżek ubezpieczyciel ma trudności z oceną ryzyka przy kalkulacji składek oraz przy ewentualnych zmianach systemu. Efekty zjawiska łaknienia zniżki osłabiają funkcję taryfikacyjną systemu bonus-malus. Wyższa szkodowość ubezpieczonych, czy też ostrzejsze reguły przejścia pomiędzy klasami, powodują bowiem nasilenie zjawiska, co w konsekwencji prowadzi do obniżenia się obserwowanej szkodowości i zwiększenia prawdopodobieństwa trafienia ubezpieczonych do klas o mniejszej składce. Ubezpieczyciel obserwuje zatem mniejszą od rzeczywistej szkodowość, a wartość oczekiwana rozkładu wysokości szkód jest większa. Zróżnicowanie wartości parametrów pomiędzy klasami SBM powoduje także większą wariancję parametrów obserwowanych przez ubezpieczyciela.

Wyniki otrzymane dzięki zastosowaniu modelu długookresowego umożliwiają również wyznaczenie miar zjawiska łaknienia zniżek charakteryzujących SBM jako całość. Jedną z

nich jest wskaźnik AOR, za pomocą którego można przeprowadzać porównania potencjalnego nasilenia zjawiska łaknienia zniżek w systemach o różnej liczbie klas, wysokościach składek i regułach przejścia.

Model długookresowy jest wygodny w rozważaniach teoretycznych, w praktyce jednak założenie długookresowości należy zawsze poddać weryfikacji, gdyż rzeczywiste warunki funkcjonowania systemu bonus-malus, jak też same systemy dość szybko się zmieniają. W takiej sytuacji dobrym rozwiązaniem wydaje się zastosowanie modelu krótkookresowego, dzięki któremu można wyznaczyć optymalne pułapy łaknienia zniżki dla dowolnego horyzontu czasowego. Stosowanie go w przypadku pojedynczego ubezpieczonego wymaga jednak ustalenia liczby okresów, a przewidywanie zjawiska i jego skutków w całej zbiorowości ubezpieczonych wymaga znajomości ich struktury według klas oraz oczekiwanego horyzontu czasowego optymalizacji. Wyniki obliczeń przy zastosowaniu tej metody pokazują, że pułapy łaknienia zniżek dla poszczególnych klas wzrastają wraz z czasem dążąc do otrzymanych za pomocą modelu długookresowego. Dla prezentowanych obliczeń już przy horyzoncie 30-letnim obliczone optymalne pułapy łaknienia zniżki w obu przypadkach są niemal identyczne.

Ważnych wniosków dostarcza porównanie wyników metody długookresowej i krótkookresowej dla różnych horyzontów czasowych. Stosowanie pułapów optymalnych długookresowo przez ubezpieczonego preferującego bliski horyzont decyzyjny, naraziłoby go na znaczne koszty. W analizowanym przykładzie stosowanie strategii opartej na wynikach długookresowych daje większe koszty niż zgłaszanie wszystkich szkód dla horyzontu mniejszego niż 9 lat. W praktyce użytkownicy samochodów biorą pod uwagę raczej krótsze okresy czasu. Wynika z tego, że w praktyce nie jest obojętne, która z metod zostanie zastosowana, ponieważ jeśli horyzont czasowy jest krótszy niż 9 – letni, to wyniki modeli długo i krótkookresowego znacząco różnią się od siebie. Pułapy łaknienia zniżki otrzymane w modelu długookresowym należy uważać za maksymalne rozpatrywane przez ubezpieczonych pułapy łaknienia zniżki, gdyż wyższe pułapy nie są opłacalne przy żadnych założeniach

Ważnym zagadnieniem jest wpływ założeń na otrzymane wyniki. Wpływ typu wybranego rozkładu liczby i wysokości szkód na efektywną szkodowość oraz wartość oczekiwanej szkody zgłoszonej do zakładu ubezpieczeń nie przekraczał w analizowanym przypadku 10% wartości AOR. Dla omawianego modelu cechą charakterystyczną jest szybki wzrost wartości pułapów łaknienia zniżek wraz ze wzrostem szkodowości²⁹. Oznacza to, że im częściej kierowcy zdarzają się szkody tym wyższych szkód nie opłaca się zgłaszać. Oszczędności uzyskane w ten sposób są tym wyższe im większa jest szkodowość, co oznacza,

²⁹ W przykładzie prezentowanym w pracy Lemaire'a [1995] sugeruje się, że ta zależność słabnie dla $\lambda > 1,5$

że zjawisko łaknienia zniżek dotyczy szczególnie kierowców gorszych, o większej szkodowości. Jednak oszczędności uzyskane przez kierowców, którzy popełniają wypadki bardzo często, rosną coraz wolniej wraz ze wzrostem szkodowości.

Ważną kwestią jest także wpływ szkodowości rzeczywistej na obserwowaną przez ubezpieczyciela. Dla niskich wartości szkodowości rzeczywistej liczba szkód niezgłaszanych rośnie szybciej niż szkód zgłaszanych. Dla wyższych wartości obie liczby rosną w podobnym tempie.

Czynnikiem wpływającym na wysokość szkód, których nie opłaca się zgłaszać jest także przeciętna rzeczywista wysokość szkody. Jej wzrost powoduje zmniejszenie się różnicy pomiędzy szkodowością rzeczywistą a efektywną. Oznacza to, że, mimo iż niezgłaszane szkody mają coraz większą wartość, to ich liczba jest coraz mniejsza. Zatem samo zjawisko ma coraz mniejsze skutki dla ubezpieczyciela. Drugim parametrem związanym z wysokością szkód jest ich wariancja. Nie wpływa ona znacząco na wartość pułapów, ale wraz ze wzrostem zróżnicowania szkód wzrasta prawdopodobieństwo, że szkoda nie zostanie zgłoszona. Oznacza to, że dla wyższych wartości wariancji różnica między liczbą szkód zgłoszonych i zaszytych powiększa się, a tym samym widoczniejszy staje się wpływ zjawiska łaknienia zniżki.

Powyższe wnioski zostały wykorzystane do obliczenia teoretycznego poziomu zjawiska łaknienia w Polsce. Danymi wejściowymi w obliczeniach były dane empiryczne dotyczące liczby i średniej wysokości szkód podawane w biuletynie PUNU. Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że w Polsce optymalny poziom niezgłaszanych szkód nie przekracza kwoty około 550 zł. Otrzymane dla Polski wyniki należy jednak traktować ostrożnie, ponieważ modelowanie tego zjawiska opierało się na wielu założeniach i bardzo skromnych danych empirycznych.

Podsumowując można powiedzieć, iż metody oparte na optymalizacji dynamicznej łańcucha Markowa są użytecznym narzędziem modelowania zjawiska łaknienia zniżki. Pozwalają one nie tylko na obliczenie optymalnych pułapów niezgłaszania szkód, ale także szeregu innych wartości, na które wpływa to zjawisko, co może umożliwić przewidywanie jego skutków. Model długookresowy pozwala na ogólną analizę zjawiska w długim okresie, a wyznaczone za jego pomocą wartości należy traktować jako graniczne. Model krótkookresowy pozwala na stworzenie modelu bardziej realistycznego i niewątpliwie dającego lepsze wyniki w analizie kilku lub kilkunastu lat.

Literatura :

- Bellman R. E., Dreyfus S. E. (1967) *Programowanie dynamiczne*, PWE, Warszawa
- Bijak W., Podgórska M., Utkin J. (1994) *Matematyka finansowa: teoria i praktyka obliczeń finansowych*, Bizant, Warszawa
- Burniecki K., Nowicka-Zgrajek J.(2001) *Czy straty mają ogony... czyli rozkłady żądań stosowane w matematyce ubezpieczeń majątkowych*, w: „Asekuracja&Re”, nr 3, s. 22-25
- Dudkowiak, Gwiazda (1982) *Badanie rozkładów prawdopodobieństwa szkód według ich wielkości w wybranych grupach taryfowych ubezpieczeń pojazdów samochodowych*, PWN, Warszawa – Poznań
- Feller W. (1977) *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa
- Gerber H. U. (1979) *An Introduction to mathematical risk theory*, University of Pennsylvania, Philadelphia
- Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnirith B.(1992) *Introductory to statistics with applications in general insurance*, Cambridge University Press, Cambridge
- Howard R. (1969) *Programowanie dynamiczne i procesy Markowa*, Wydawnictwo MON
- Iosifescu M. (1988) *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa
- Koźniewska I., Włodarczyk M. (1978) *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi*, PWN, Warszawa
- Krysicki W., Włodarski L.(1994) *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa
- Lemaire J. (1985), *Automobile insurance, actuarial models*, Kluwer – Nijhoff Publishing, Boston
- Lemaire J. (1995) *Bonus-Malus system in automobile insurance*, Kluwer, Boston
- Lemaire J. Hongmin Z. (1994) *A comparative analysis of 30 bonus- malus systems*, w: “ASTIN Bulletin”, Vol 24, No. 2, s. 287-309
- Monkiewicz J /red./ (2001) *Podstawy ubezpieczeń* Poltext, Warszawa
- Ostasiewicz S., Ronka-Chmielowiec W.(1994) *Metody statystyki ubezpieczeniowej*, AE Wrocław, Wrocław
- Ostasiewicz W. (2000) *Modele aktuarialne*, AE Wrocław, Wrocław
- Podgórska M., Śliwka P., Topolewski M., Wrzosek M. (2000)

Łańcuchy Markowa w teorii i zastosowaniach, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa

Puterman L. Martin (1994), *Markov decision processes. Discrete stochastic dynamic programming*, John Wiley & Sons Inc., New York

Ronka-Chmielowiec W. /red./ (2000) *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach*, AE Wrocław, Wrocław.

Sangowski T. /red./ (2000) *Ubezpieczenia gospodarcze*, Poltext, Warszawa

Śliwka P., Topolewski M. (1998) *Zjawisko „łaknienia zniżek” w ubezpieczeniach komunikacyjnych w: Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa, s. 134-149

Taylor J. M. (1992) *General Insurance. A summary of UK actuarial theory and practice*, Institute of Actuaries

Walhin F. J., Paris J. (2000) *The true claim amount and frequency distributions within a bonus-malus system*, w: “ASTIN Bulletin”, Vol 30, No. 2, s. 391- 403

Inne źródła:

Biuletyn Państwowego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń. Analiza ubezpieczeń komunikacyjnych – ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych (część I), Biuro Nadzoru i Statystyki PUNU, Warszawa, 1998

Biuletyn Państwowego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń. Analiza ubezpieczeń komunikacyjnych na podstawie danych finansowych zakładów ubezpieczeń za lata 1994 – 1998, Biuro Nadzoru i Statystyki PUNU, Warszawa, 1999

Biuletyn Państwowego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń. Wyniki sektora ubezpieczeń za rok 1999 (część I i II). (Analiza ubezpieczeń obowiązkowych s. 97 - 102), Biuro Nadzoru i Statystyki PUNU, Warszawa, 2000

Biuletyn Państwowego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń. Wyniki sektora ubezpieczeń za rok 2000 (Analiza ubezpieczeń komunikacyjnych s. 71 – 75), Biuro Nadzoru i Statystyki PUNU, Warszawa, 2001

Rozporządzenie ministra finansów z dnia 24 marca 2000 r. w sprawie ogólnych warunków obowiązkowego ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych za szkody powstałe w związku z ruchem tych pojazdów, Dz. U. 2000, Nr 26, poz. 310

Ustawa z dnia 28 lipca 1990 r. o działalności ubezpieczeniowej, Dz. U. 1996, Nr 11, poz. 62.

Załączniki:

Załącznik 1

Tabele bonus–malus zakładów ubezpieczeń: PZU, Warta i Samopomoc

PZU S.A. (w ubezpieczeniach OC i AC)

Klasa taryfowa	% składki podstawowej	Stawka/okres bezszkodowego przebiegu ubezpieczenia	przemieszczenie w klasach taryfowych w zależności od przebiegu ubezpieczenia	
			po 1-szej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono	po 2-giej i następnej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie
1	150	stawka podwójnie zastrzona	1	1
2	125	stawka zastrzona	1	1
3	100	stawka podstawowa	2	1
4	90	1 rok	2	1
5	80	2 lata	3	2
6	80	3 lata	4	3
7	70	4 lata	5	3
8	60	5 lat	6	4
9	50	6 lat	7	5
10	50	7 lat	8	5
11	40	8 lat	9	6

TUiR Warta S.A. (w ubezpieczeniach AC i OC)

Klasa taryfowa	% składki podstawowej	Stawka/okres bezszkodowego przebiegu ubezpieczenia	przemieszczenie w klasach taryfowych w zależności od przebiegu ubezpieczenia		
			po 1-szej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono	po 2-giej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie	po 3-ciej i następnej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie
1	200	stawka maksymalna	1	1	1
2	150	stawka podwyższona	1	1	1
3	125	stawka zastrzona	1	1	1
4	100	stawka podstawowa	2	1	1
5	90	1 rok	3	2	1
6	80	2 lata	4	3	1
7	70	3 lata	5	3	1
8	60	4 lata	6	4	2
9	50	5 lat	7	5	3
10	50	6 lat	8	6	4
11	40	7 lat	9	7	5

TU Samopomoc S.A.

Klasa taryfowa	% składki podstawowej	Stawka/okres bezszkodowego przebiegu ubezpieczenia	przemieszczenie w klasach taryfowych w zależności od przebiegu ubezpieczenia		
			po 1-szej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono	po 2-giej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie	po 3-ciej i następnej szkodzie w ciągu 12 m-cy, za którą wypłacono odszkodowanie
1	200	stawka maksymalna	1	1	1
2	180	stawka podwyższona	1	1	1
3	120	stawka zastrzona	2	1	1
4	100	stawka podstawowa	3	2	1
5	90	1 rok	4	2	1
6	80	2 lata	5	3	1
7	70	3 lata	6	4	1
8	60	4 lata	7	4	2
9	50	5 lat	8	5	2
10	40	6 lat	9	6	2

Załącznik 2

Podstawowa wersja programu w Matlab 5.3

```
% DANE WEJSCIOWE
%////////////////////////////////////
%Wybor modelu : długo lub krótkookresowy
'Wybierz model 1-krótco 2-długo'
Model=input('Model=')
%Wybór zakładu ubezpieczeń: PZU lub Warta (domyślnie PZU)
'Wybierz SBM: 1-PZU 2-Warta'
System=input('Nr systemu = ');
check0=size(System,1);
if check0==0;
    System=1;
end
System=System(1,1)
% Wybór wysokości stopy procentowej
stopa=input('podaj stopę procentową (jako ułamek) = ');
check1=size(stopa,1);
if check1==0;
    stopa=0.05;
end
    stopa=stopa(1,1)
dyskonto=1/(1+stopa);
%Wybor parametru rozkładu liczby szkód
'Przyjęty rozkład liczby szkód - Poissona .Wybierz parametr'
lambda=input('Podaj szkodowosc = ');
check9=size(lambda);
if check9==0;
    lambda=0.3;
end
lambda=lambda(1,1)
maxilszk=5;
Xp=0:1:maxilszk;
%Rozkład liczby szkod bez laknienia niżki
PP=poisspdf(Xp,lambda).';
W2Pksum=zeros(7,1);
rest=1-cumsum(PP);
Prest=rest(size(rest,1),1);
%Wybor parametrow rozkladu wysokosci szkód
'Przyjęty rozkład szkód - Gamma .Wybierz parametry '
a=input('Parametr a = ');
b=input('Parametr b = ');
check2=size(a,1);
check3=size(b,1);
if or(check2,check3)==0;
    a=2;
    b=1;
end
a=a(1,1)
b=b(1,1)
%techniczny parametr dokładności oszacowania całki metoda trapezow
%(podstawa trapezu)
dok=0.001;
```

```

%techniczny parametr zakresu do ktorego prowadzi się obliczenia dotyczące
%wszystkich rozkładów
zak1=input('Zakres wartosci rozkladu szkod (od 0 do ?), ?= ');
check5=size(zak1,1);
if check5==0 ;
    zak1=30;    %zakres
end
zak1=zak1(1,1)
x=0:dok:zak1;    %wektor X
P=gampdf(x,a,b); %funkcja gestosci R Gamma.
EG=trapez(x,x.*P);
%Pułapy wysokosci niezgłaszanych szkod wzięte do badania (zbior decyzji):
% minimalny, maksymalny, odstep pomiedzy kolejnymi
pulmin=input('Pułap minimalny niezgłaszanych szkod = ');
pulmax=input('Pułap maksymalny niezgłaszanych szkod = ');
check6=size(pulmin,1);
check7=size(pulmax,1);
if or(check6,check7)==0;
    pulmin=0;
    pulmax=3;
end
pulmin=pulmin(1,1)
pulmax=pulmax(1,1)
odstep=input('Odstep miedzy kolejnymi pulapami = ');
check8=size(odstep);
if check8==0;
    odstep=1;
end
odstep=odstep(1,1);
D=(pulmin:odstep:pulmax) .';
Dilosc=(pulmax-pulmin)/odstep+1;
%WSTEPNE OBLICZENIA////////////////////////////////////
%Prawdopodobienstwa niezgłoszenia szkody- dystrybuanta G
F=gamcdf(D,a,b);
for D1=pulmin+odstep:odstep:pulmax
    x1=0:dok:D1;
    x1z=D1:dok:zak1;
    P1=gampdf(x1,a,b);
    P1z=gampdf(x1z,a,b);
    Z=trapez(x1,x1.*P1)/trapez(x1,P1);
    ZZ=trapez(x1z,x1z.*P1z)/trapez(x1z,P1z);
    licznik01=round(D1*(1/odstep)+1);
    Z1(licznik01,1)=Z;
    Z1Z(licznik01,1)=ZZ;
end
%Prawdopodobienstwa niezgłoszenia szkody z łaknieniem zniżek
W2Pksum=zeros(7,1);
for D1=pulmin+odstep:odstep:pulmax
    W1Pksum=0;
    for k=0:1:maxilsk
        Pksum=0;
        for h=k:1:maxilsk
            Pi= gamcdf(D1,a,b);
            Pk=PP(h+1,1)*binopdf(k,h,(1-Pi));
            Pksum=Pksum+Pk;
        end
        W1Pksum = [W1Pksum;Pksum];
    end
end
W2Pksum= [W2Pksum,W1Pksum];
end
W3=W2Pksum(2:7,2:size(W2Pksum,2));
WPKS=[PP,W3];
%Efektywna szkodowosc

```

```

LS=0:1:maxilsk;
EF=LS*WPKS;
%Macierz prawdopodobienstw przejścia - SBM OC, AC PZU-Nowy (2001) i SBM
OC,AC Warta
p1=PP(2,1);
p2=PP(3,1);
p0=PP(1,1);
p3=1-p0;
p4=1-p0-p1;
if System==1;
    Tab = [1-p0      ,p0 ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ;
    1-p0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ;
    1-p0-p1 ,p1      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ;
    1-p0-p1 ,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ;
    0      ,1-p0-p1,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,0      ;
    0      ,0      ,1-p0-p1,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0      ,0      ;
    0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0      ;
    0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ;
    0      ,0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ;
    0      ,0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,0      ,p1      ,0      ,0      ,p0      ;
    0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,0      ,p1      ,0      ,p0      ];
    Tabs=[150; 125; 100; 90; 80; 80; 70; 60; 50; 50; 40];
else System==2;
    Tab=[1-p0 , p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
    1-p0 , 0, p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
    1-p0 , 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
    1-p0-p1 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
    1-p0-p1-p2, p2 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0;
    1-p0-p1-p2, 0,p2 ,p1, 0, 0, p0, 0, 0, 0, 0;
    1-p0-p1-p2, 0,p2 , 0, p1,0, 0, p0, 0, 0, 0;
    0, 1-p0-p1-p2, 0, 1-p0-p1 ,0,p1, 0, 0,p0, 0,0;
    0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, 1-p0-p1 , 0, p1,0, 0,p0, 0;
    0, 0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, p2 ,0, p1,0, 0,p0;
    0, 0, 0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, p2 ,0, p1,0,p0 ];
    TabS=[200;150; 125; 100; 90; 80; 70; 60; 50; 50; 40];
end ;
Macierz0=Tab^50;
%Obliczenia skladki
Narzut=0.6;
%Netto i brutto w klasie startowej
SKLADKA=lambda*EG;
SKLADB=SKLADKA*(1+Narzut);
% Netto i brutto w klasach
Sk1Net=SKLADKA.*TabS/100;
Sk1Br=SKLADB.*TabS/100;
Sk1Net;
Sk1Br;
%Oczekiwany koszt niezgloszonych szkod
lambda;
EF;
Z1;
KNSW=0;
for licznik=1:1:Dilosc
    KNS=(lambda-EF(1,licznik))*Z1(licznik,1);
    KNSW=[KNSW;KNS];
end
KNSW=KNSW(2:size(KNSW,1),1);
s=size(Tab,1);
%OBLICZENIA DLA MODELU
%KRÓTKOOKRESOWEGO////////////////////////////////////
%Optymalizacja dynamiczna - Modelowanie ŁZ za pomoca metody rekurencyjnej
dla kolejnych okresow
if Model==1;

```

```

%Dodatkowa dana - liczba okresów
LOKR=input('Podaj liczbe okresow = ');
check10=size(LOKR,1);
if check10==0;
    LOKR=10;
end
LOKR=LOKR(1,1)
WekDecyzji=zeros(s,1);
WekOpt=[1.44;1.2;0.96;0.864;0.768;0.768;0.672;0.576;0.48;0.48;0.384];
for okres=1:1:LOKR %petla badajaca okresy
%*****
    Qd=zeros(s,1);
    Vd=zeros(s,1);
    for strat=1:1:size(KNSW) %petla oznaczajaca
%strategie*****
        if okres<=1
v=[1.44;1.2;0.96;0.864;0.768;0.768;0.672;0.576;0.48;0.48;0.384];
%zeros(s,1);
            else
                v=Opt;
            end
            p0=WPKS(1,strat);
            p1=WPKS(2,strat); %Macierz przejścia w wybranej strategii
            p2=WPKS(3,strat);
if System==1;
    TabelaP=[1-p0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
1-p0 ,0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
1-p0-p1 ,p1 ,0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
1-p0-p1 ,p1 ,0 ,0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
0 ,1-p0-p1,p1 ,0 ,0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
0 ,0 ,1-p0-p1,p1 ,0 ,0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
0 ,0 ,1-p0-p1,0 ,p1 ,0 ,0 ,p0 ,0 ,0 ,0 ;
0 ,0 ,0 ,1-p0-p1,0 ,p1 ,0 ,0 ,p0 ,0 ,0 ;
0 ,0 ,0 ,0 ,1-p0-p1,0 ,p1 ,0 ,0 ,p0 ,0 ;
0 ,0 ,0 ,0 ,1-p0-p1,0 ,0 ,p1 ,0 ,0 ,p0 ;
0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,1-p0-p1,0 ,0 ,p1 ,0 ,p0 ];
else System=2;
    TabelaP=[1-p0 , p0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
1-p0 , 0 , p0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
1-p0 , 0 , 0,p0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
1-p0-p1 , p1 , 0 , 0,p0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
1-p0-p1-p2 , p2 , p1 , 0 , 0,p0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
1-p0-p1-p2 , 0,p2 ,p1 , 0 , 0 , p0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
1-p0-p1-p2 , 0,p2 , 0 , p1,0 , 0 , p0 , 0 , 0 , 0 , 0 ;
0 , 1-p0-p1-p2 , 0 , 1-p0-p1 ,0,p1 , 0 , 0,p0 , 0,0;
0 , 0 , 1-p0-p1-p2 , 0 , 1-p0-p1 , 0 , p1,0 , 0,p0 , 0 ;
0 , 0 , 0 , 1-p0-p1-p2 , 0 , p2 ,0 , p1,0 , 0,p0 ;
0 , 0 , 0 , 0 , 1-p0-p1-p2 , 0 , p2 ,0 , p1,0,p0 ];
end;
TabelaR=ones(s,1)*Sk1Br.'+KNSW(strat,1).*ones(s,s); %macierz kosztow
%przejścia w wybranej strategii
qil=TabelaP.*TabelaR;
qi=sum(qil,2); %suma po wierszach z macierzy iloczynu -
Qd=[Qd,qi]; %kolekcja wektorow kolumnowych kosztow - kazda kolumna-decyzja
v=qi+dyskonto.*TabelaP*v;
Vd=[Vd,v]; %kolekcja kosztow w kolejnym okresie
end
Vd =Vd(:,2:size(KNSW)+1);
Opt=min(Vd.').';
WekOpt=[WekOpt,Opt]; %kolekcja kosztow optymalnych w kolejnych latach

% Przedzial decyzji *****
Decyzja=zeros(s,1);

```

```

wie=1;
while wie<=size(Vd,1);
    kol=1;
    while kol<=size(Vd,2);
        if Vd(wie,kol)== Opt(wie,1) ;
            Decyzja(wie,1)=D(kol,1);
        end;
        kol=kol+1;
    end;
    wie=wie+1;
end;
Decyzja;
% K przedz decyzji *****
WekDecyzji=[WekDecyzji,Decyzja];
end
%Wydatki dla nieskonczenie odleglego horyzontu czasowego w wybranych
strategiach
% Stosujemy tylko wybrana strategie przez caly okres
WekVinf=zeros(s,1);
for strat=1:1:size(KNSW)
    p0=WPKS(1,strat);
    p1=WPKS(2,strat);          %Macierz przejścia w wybranej strategii
    if System==1;
        TabelaP= [1-p0      ,p0      ,0 ,0      ,0,0      ,0      ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
        1-p0      ,0      ,p0      ,0 ,0      ,0      ,0      ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
        1-p0-p1 ,p1      ,0      ,p0 ,0      ,0      ,0      ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
        1-p0-p1 ,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0      ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
        0      ,1-p0-p1,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0      ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
        0      ,0      ,1-p0-p1,p1      ,0      ,0      ,p0      ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ;
        0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,p1      ,0      ,0 ,p0,0 ,0 ,0 ;
        0      ,0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,p1      ,0 ,0 ,p0,0 ,0 ;
        0      ,0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0      ,0      ,p1,0 ,0 ,p0;
        0      ,0      ,0      ,0      ,0      ,1-p0-p1,0 ,0 ,p1,0 ,p0 ];
    else System==2;
        TabelaP=[1-p0 , p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        1-p0 , 0, p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        1-p0 , 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        1-p0-p1 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        1-p0-p1-p2, p2 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        1-p0-p1-p2, 0,p2 ,p1, 0, 0, p0, 0, 0, 0, 0, 0;
        1-p0-p1-p2, 0,p2 , 0, p1,0, 0, p0, 0, 0, 0, 0;
        0, 1-p0-p1-p2, 0, 1-p0-p1 ,0,p1, 0, 0,p0, 0,0;
        0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, 1-p0-p1 , 0, p1,0, 0,p0, 0;
        0, 0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, p2 ,0, p1,0, 0,p0;
        0, 0, 0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, p2 ,0, p1,0,p0 ];
    end;
    qil=TabelaP.*TabelaR;
    qi=sum(qil,2);          %suma po wierszach z macierzy iloczynu -
    Vinf=(inv(eye(s)-dyskonto.*TabelaP))*qi;
    WekVinf=[WekVinf,Vinf];
end
min(WekVinf(:,2:size(KNSW)).') .';
WekOpt(:,okres);
WekVinf(1,:);
WekOpt=WekOpt.'
save WekOpt -ASCII -TABS WekOpt;
WekDecyzji=WekDecyzji.'
save WekDecyzji -ASCII -TABS WekDecyzji;
save Vd -ASCII -TABS Vd;
end;
%OBLICZENIA DLA MODELU DŁUGOOKRESOWEGO////////////////////////////////////

```

```

%Optymalizacja dynamiczna - Modelowanie ŁZ za pomoca metody iteracyjnej dla
kolejnych okresow
if Model==2;
    s=size(Tab,1);
    TabelaP=zeros(1,s);
    TabelaR=zeros(1,s);
    TabelaQ=zeros(s,1);
    for strat=1:1:size(KNSW)
        p0=WPKS(1,strat);
        p1=WPKS(2,strat);
        p2=WPKS(3,strat);
    if System==1;
        TP=[1-p0 , p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0 , 0, p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0-p1 , p1, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0-p1 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            0, 1-p0-p1 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0;
            0, 0,1-p0-p1 ,p1, 0, 0, p0, 0, 0, 0, 0;
            0, 0,1-p0-p1 , 0, p1,0, 0, p0, 0, 0, 0;
            0, 0, 0, 1-p0-p1 ,0,p1, 0, 0,p0, 0,0;
            0, 0, 0, 0, 1-p0-p1 , 0, p1,0, 0,p0, 0;
            0, 0, 0, 0, 0, 1-p0-p1 ,0, p1,0, 0,p0;
            0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-p0-p1 ,0, p1,0,p0 ];
    else System=2;
        TP=[1-p0 , p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0 , 0, p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0 , 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0-p1 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0-p1-p2, p2 , p1, 0, 0,p0, 0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0-p1-p2, 0,p2 ,p1, 0, 0, p0, 0, 0, 0, 0;
            1-p0-p1-p2, 0,p2 , 0, p1,0, 0, p0, 0, 0, 0;
            0, 1-p0-p1-p2, 0, 1-p0-p1 ,0,p1, 0, 0,p0, 0,0;
            0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, 1-p0-p1 , 0, p1,0, 0,p0, 0;
            0, 0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, p2 ,0, p1,0, 0,p0;
            0, 0, 0, 0, 1-p0-p1-p2, 0, p2 ,0, p1,0,p0 ];
    end;
    TabelaP=[TabelaP;TP];
    TR=ones(s,1)*Sk1Br.'+KNSW(strat,1).*ones(s,s);
    TabelaR=[TabelaR;TR];
    TQ=TP.*TR*ones(s,1);
    TabelaQ=[TabelaQ,TQ];
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Decyzja=zeros(s,1);
TabelaP;
TabelaR;
TabelaQ;
for licznik=1:1:5
    'ITERACJA NR -----'
    licznik
    Decyzja
    Macierz=zeros(1,s);
    for wiersz=1:1:s
        u=(Decyzja(wiersz,1)/odstep)*s+1+wiersz;
        W=TabelaP(u,:);
        Macierz=[Macierz;W];
    end
    Macierz=Macierz(2:s+1,:);
    %Macierz strategii*****
    WekQ=zeros(1,1);
    for wiersz=1:1:s
        Q=TabelaQ(wiersz,Decyzja(wiersz,1)/odstep+2);
        WekQ=[WekQ;Q];
    end
end

```

```

end
WekQ=WekQ(2:s+1,1);
%Wektor strategii*****
I=eye(s);
Macierz1=dyskonto.*Macierz
C=I-Macierz1;
JED=ones(s,1);
N=[C(:,1:s-1),JED];
Vil=inv(I-Macierz1)*WekQ
X=N\WekQ;
vi=[X(1:s-1,1);0]
g=X(s,1)
% Algorytm rozwiązywania równań*****
Dochod=zeros(s,1);
for strategia=1:1:size(KNSW)
    Pk=TabelaP((strategia-1)*s+2:(strategia-1)*s+s+1,:);
    Qk=TabelaQ(:,strategia+1);
    Doch=Qk+dyskonto.*Pk*vi;
    Dochod=[Dochod,Doch];
end
Dochod=(Dochod(:,2:size(Dochod,2)).');
Opt=min(Dochod)
% Algorytm wyliczania dochodów*****
Dec=zeros(1,1);
for j=1:1:s
    for i=1:1:size(Dochod,1)
        if Opt(1,j) == Dochod(i,j);
            De=D(i,1);
        end
    end
end
Dec=[Dec;De];
end
% Wyznaczania strategii optymalnej*****
Decyzja
Dec=Dec(2:s+1,:);
if Dec==Decyzja;
break;
end
Decyzja=Dec;
end % koniec wielkiej petli
licznik;
Dec;
Macierz;
Es= (Macierz)^50;
AOR=Es(1,:)*Dec;
%prawdopodobieństwo niezgłoszenia szkody czyli dystrybuanta Gamma
PI=gamcdf(Dec,a,b)
% efektywna szkodowość
ZN1=[0];
EF1=[0];
Z1Z1=[0];
for i=1:1:11
    EF2=EF(1,Dec(i,1)/odstep+1);
    EF1=[EF1;EF2];
    ZN2=Z1(Dec(i,1)/odstep+1,1);
    ZN1=[ZN1;ZN2];
    Z1Z2=Z1Z(Dec(i,1)/odstep+1,1);
    Z1Z1=[Z1Z1;Z1Z2];
end
EF1=EF1(2:s+1,:);
ZN1=ZN1(2:s+1,:);
Z1Z1=Z1Z1(2:s+1,:);
%oczekiwana wartość niezgłoszonej szkody

```

```
%Prawdopodobienstwa stacjonarne  
Macierz0(1,:).';  
Es(1,:).';  
Z1Z2CAL=(Z1Z1.>')*Es(1,:).'  
end;
```